Examen Final Departamental. Cálculo Diferencial e Integral III.
Otoño 2022

NOMBRE :____ CU :________

i) No se permite el uso de calculadoras.
ii) Cada pregunta vale lo mismo (1/8 cada una).
Duración: 2 horas 40 minutos

1. Una fábrica de procesamiento de maíz requiere construir una esturctura metálica formada por un cilindro en la base y un cono circular recto en la parte superior. La parte cónica debe tener una altura de 3 metros, como se muestra en la figura. Se especifica que el volumen total contenido en la estructura sea de 1000 m^3. El costo del material en la parte cilíndrica es de 50 pesos por m^2, mientras que en la parte cónica el costo es de 80 pesos por m^2. Se desea encontrar el radio r y altura h del cilindro tales que el costo del material de la superficie de la estructura sea mínimo (no tomar en cuenta la base del cilindro).

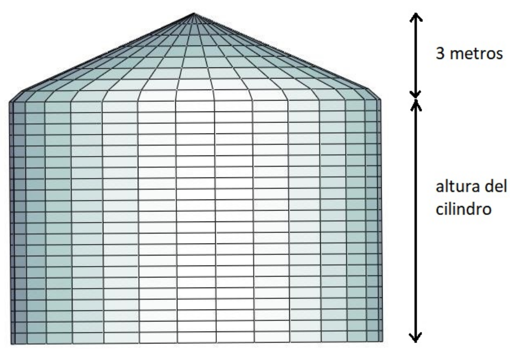

Figura 1: Estructura con base cilíndrica y tapa cónica.

a) Plantea el problema a minimizar junto con las restricciones apropiadas.

b) Escribe en forma desarrollada un sistema de ecuaciones derivadas al usar los multiplicadores de Lagrange en el problema anterior (no es necesario resolver el sistema de ecuaciones).

Nota: El volumen de un cono circular recto con radio de la base r y altura h, está dado por $\frac{\pi r^2 h}{3}$; el área de la superficie de dicho cono es $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$. El volumen de un cilindro con radio de la base r y altura h, está dado por $\pi r^2 h$; el área de la superficie de dicho cilindro es $2\pi r h$.

2. Sea S la superficie en el espacio xyz dada por la ecuación $e^{x+2z} + z^2 = xyz + 4$. Encuentra la ecuación del plano tangente a S en el punto $(2, 1, -1)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y, z) = x^2 - 3xyz + z^3 y - 1$. Encuentra la dirección en la que f crece más a partir del punto $(2, 1, -1)$. ¿Cuál es el valor de la máxima razón de crecimiento en dicho punto?

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y tal que $f(1) = 2$. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f(x - 2z) + yz - 4 &= 0 \qquad (1) \\ yf(z) + x - 7 &= 0, \qquad (2) \end{aligned}$$

usa el Teorema de la Función Implícita para encontrar condiciones generales en $f'(1)$ con las cuales el sistema anterior se puede resolver (no de forma explícita necesariamente) de manera única para x y para z en términos de y con y en algún intervalo abierto que contiene a 2, x en algún abierto que contiene a 3, z en algún abierto que contiene a 1.

5. Encuentra el volumen del sólido en el espacio xyz acotado por las superficies $y = x^2$, $y = x$, $z = 0$, $z = x + y$.

6. Calcula $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{1 + \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} dxdydz$, si

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}.$$

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y sea D la región encerrada en el plano xy por las curvas $y = x^2$, $y = 2x$. Escribe $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ como una integral doble iterada de las siguientes formas:

   a) $\displaystyle\int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$

   b) $\displaystyle\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \right) dy.$

8. Encuentra el valor de $\displaystyle\iint_D \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$, donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}.$$

Sugerencia: $\dfrac{t}{1 + t} = 1 - \dfrac{1}{1 + t}$.