CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 15
Otoño 2022
Criterios de convergencia de series. Series de potencias. Series de Taylor

Nota: Sólo se incluirán los temas que se hayan cubierto en clase.

1. Estudia la convergencia de la serie:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{1/n}.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3!\;n!\;3^n}.$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+n}{n!}.$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}.$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}.$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{1+e^{2n}}.$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}.$

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}n}{n^{1.1}}.$

   (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{1}{2^n}\right).$

2. Analiza si la serie converge absolutamente, condicionalmente o diverge:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^3}}.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}.$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$.

3. Considera la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+a)^{n+1}}$, con $a>0$. Determina a de modo que el radio de convergencia de la serie sea igual 3.

4. En cada inciso, obtén la serie de Taylor generada por $f(x)$ en x_0:

   (a) $f(x)=e^{2x},\;\; x_0=-1$.

   (b) $f(x)=\cosh(x),\;\; x_0=0$.

   (c) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \ln(1+t)dt,\;\; x_0=0$.

5. La serie de Taylor generada por $f(x)=e^x$ en $x_0=0$ es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. A partir de esta información:

   (a) Calcula $1+\ln 2+\dfrac{(\ln 2)^2}{2!}+\dfrac{(\ln 2)^3}{3!}+\dfrac{(\ln 2)^4}{4!}+\dots$

   (b) Encuentra la serie de Taylor generada por $g(x)=e^{-2x^2}$ en $x_0=0$.

   (c) Demuestra que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}=1$, con $\lambda>0$ una constante.

   (d) Encuentra el valor exacto de $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!+e^n}{n!\,e^n}$. Simplifica la respuesta.

6. La serie de Taylor generada por $f(x)=\ln(1+x)$ en $x_0=0$ es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.
   A partir de esta información:

   (a) Halla la serie de Taylor generada por $f(x)=x\ln(1+x^2)$ en $x_0=0$.

   (b) Halla la serie de Taylor generada por $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en $x_0=0$.

7. Demuestra que e^x es igual a su serie de Taylor en $x_0=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, esto es,

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

   Sugerencia: Utiliza la fórmula de Taylor y demuestra que el residuo tiende a 0 cuando $n\to\infty$.