

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 14

Otoño 2022

Sucesiones de números reales. Series geométricas y telescópicas

1. Calcula el límite de cada sucesión $\{a_n\}$ o justifica si ésta diverge:

(a) $a_n = \frac{\tan^{-1}(n^2)}{\ln(1+n)}$.

(b) $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$.

(c) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$.

(d) $a_n = [n - \ln(3e^n + 1)]$.

(e) $a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

(f) $a_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$.

(g) $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$.

(h) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

(i) $a_n = (\ln n)^{1/n}$. Sugerencia: $1 \leq \ln n \leq n$, para $n \geq 3$.

2. Demuestra que:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha^n)^{1/n} = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ \alpha & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b)$, $a, b > 0$.

3. Considera la sucesión $I_n = \int_1^\infty \left(\frac{n}{x} - \frac{n^2}{1+nx}\right) dx$.

(a) Demuestra, justificando con detalle, que

$$I_n = n \ln \left(\frac{1+n}{n}\right).$$

(b) Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

4. En cada inciso, encuentra el valor de la serie o justifica si ésta diverge:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{2n-1}}.$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n-1}}{2^{n+2}}.$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} c_0 e^{-nbt_0}, \quad c_0, b, t_0 > 0.$$

$$(d) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} + 3^{n+1}}{6^n}.$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}).$$

$$(f) \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \quad \text{Sugerencia: usa fracciones parciales.}$$