

## Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2022

### Laboratorio 14: Integrales Triples

1. Encuentra el valor de  $a > 0$  tal que  $\iiint_{D_a} (x + y + z) dx dy dz = 64$ , donde  $D_a$  es el paralelepípedo en el espacio  $xyz$  dado por  $[0, a] \times [0, 2a] \times [0, a]$ .
2. Sea  $D$  la región sólida en  $\mathbb{R}^3$  acotada por las superficies  $y = x^2$ ,  $y = -x^2 + 2x$ ,  $z = 0$ ,  $z = x^2 + y$ . Escribe  $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$  como una integral triple iterada.
3. Sea  $D$  la región sólida en  $\mathbb{R}^3$  acotada por las superficies  $y = x^2$ ,  $y = x$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2x$ . Encuentra el valor de  $\iiint_D y dx dy dz$ .
4. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f \geq 0$ . El sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje  $x$  la región plana delimitada por la curva  $y = f(x)$ , el eje  $x$ , y las rectas  $x = a$ ,  $x = b$ , está dado por

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x \in [a, b], -f(x) \leq y \leq f(x), -\sqrt{(f(x))^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{(f(x))^2 - y^2} \right\}.$$

Usa la igualdad  $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{\pi r^2}{2}$ ,  $\forall r \geq 0$ , para demostrar que el volumen de  $D$ , dado por la integral  $\iiint_D 1 dx dy dz$ , es igual a  $\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ .

5. Encuentra el valor de  $\iiint_D (2z + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , donde

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, z \in [0, 1] \right\}.$$

6. Encuentra el valor de  $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz$ , donde

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0 \right\}.$$

7. Sea  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\mathbf{T}(u, v, w) = (u + v, v - 2w, u - w)$ . Sea  $D^* = [0, 1] \times [-2, 0] \times [0, 1]$ . Encuentra el valor de  $\iiint_D (x - y + z) dx dy dz$ , donde  $D = \mathbf{T}(D^*)$ .