

# Cálculo Diferencial e Integral I

## Ejercicios para el Laboratorio 10

### Funciones monótonas, extremos locales y puntos críticos

1. Verifica que la función  $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 5x + 3$  es estrictamente decreciente.
2. ¿Bajo que condiciones la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  es estrictamente creciente?
3. Mostrar que la función  $f(x) = x - \cos x$  es estrictamente creciente.
4. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x) = x^2 + |2x + 2|$ .
5. Si  $p(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$ , ¿qué condiciones deben cumplir los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que el polinomio  $p$  no tenga ni máximo ni mínimo local?
6. Determinar los extremos locales de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{si } x \leq 1, \\ x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

7. Mostrar que la función

$$f(x) = ax^3 + bx^2,$$

con coeficientes reales  $a$ ,  $b \neq 0$ , siempre tiene un extremo relativo.

8. Determinar todos los puntos críticos de las siguientes funciones. Identificar si el punto crítico corresponde o no a un extremo local.

•  $f(x) = -x^4 + 2x^2$

•  $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

•  $f(x) = x + \sqrt{1 - x}$

•  $f(x) = |x - x^2|$

•  $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

•  $f(x) = x + \sin x$

9. Sea  $f$  la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & \text{si } -2 < x < -1, \\ 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 7, & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

- (a) Determina los puntos donde  $f$  es continua y los puntos donde  $f$  es diferenciable.
- (b) ¿En qué intervalos es  $f$  creciente? ¿decreciente?
- (c) ¿Cuáles son los puntos críticos de  $f$ ?
- (d) Encuentra los extremos locales de  $f$  y usa el criterio de la primera derivada para determinar si corresponden a máximos o mínimos de  $f$

### Convexidad, concavidad y puntos de inflexión

- 10. Determina intervalos de convexidad, concavidad, y puntos de inflexión de la gráfica de  $y = 10x^3 - x^5$ .
- 11. Encuentra los valores de las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$  tales que la gráfica de  $y = ax^3 + bx^2 + cx$  tenga un máximo local en  $x = 3$ , un mínimo local en  $x = -1$  y un punto de inflexión en  $(1, 11)$ .

## Graficación

12. Realiza las gráficas de las siguientes funciones. En el ejercicio considera calcular dominio, intersección con los ejes, asíntotas, máximos y mínimos locales, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión, intervalos de concavidad y convexidad.

•  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

•  $f(x) = |x - x^2|$

•  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

•  $f(x) = x^{1/3} - x$

13. Realizar la gráfica de una función continua  $y = f(x)$  que satisface las siguientes condiciones:

(a)  $f(-2) = 1, f(1) = -2, f(4) = 2$

(b)  $f'(x) > 0$  si  $x < -2$  o  $x > 1$ ,  $f'(x) < 0$  si  $-2 < x < 1$ ,  $f'(1) = 0$ , no existe  $f'(-2)$

(c)  $f''(x) > 0$  si  $x < -2$  o  $-2 < x < 4$ ,  $f''(x) < 0$  si  $x > 4$ ,  $f''(4) = 0$ , no existe  $f''(-2)$

(d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -5, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$