Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2022

Ejercicios adicionales para el examen final

Los siguientes ejercicios son de práctica para los siguientes temas (revisar también los ejercicios de los Laboratorios del 10 al 14):

a) Multiplicadores de Lagrange
b) Máximos y mínimos en regiones cerradas y acotadas
c) Teoremas de la función implícita e inversa
d) Integrales dobles, teorema de cambio de variables
e) Integrales triples

1. Encuentra los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ en el disco $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. Sea $f(x, y) = 1 + xy + x - 2y$ y sea D una región triangular en el plano xy con vértices en $(1, -2)$, $(5, -2)$ y $(1, 2)$. Encuentra los valores máximo y mínimo de f en D.

3. Encuentra los extremos de $f(x, y, z) = x + y + z$ sujeta a las restricciones:
$x^2 - y^2 = 1$, $2x + z = 1$.

4. Se desea diseñar una lata cilíndrica. El costo por centímetro cuadrado del material de la tapa es de 10 centavos. El costo del resto del material es de 5 centavos por centímetro cuadrado. Encuentra las dimensiones de la lata de menor costo que contenga 1 litro.

5. Muestra que existen funciones únicas de clase C^1, $u = u(x)$, $v = v(x)$ para x en algún abierto que contiene a -1, u y v en abiertos que contienen a 1, con $u(-1) = v(-1) = 1$, y tales que
$$xe^{u(x)} + u(x)e^{v(x)} = 0, \quad xe^{v(x)} + v(x)e^{u(x)} = 0.$$

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y tal que $f(0, 0) = 0$. Encuentra condiciones sobre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ para que en la ecuación $f(x + f(x, y), y - f(x, y)) = 0$, la variable x se pueda escribir en la forma $x = g(y)$, con g de clase C^1 en una vecindad de 0, x en una vecindad de 0, y tal que $0 = g(0)$.

7. Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{aligned} x^2u^3 - uy + v^3 - 2xv &= 6 \qquad (1) \\ xu^2 - yv &= 2, \qquad (2) \end{aligned}$$

   (a) Muestra que este sistema define de manera implícita funciones de clase C^1, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, para todo (x, y) en algún abierto que contiene a $(1, -1)$, con $2 = u(1, -1)$ y $-2 = v(1, -1)$.

(b) Encuentra el valor de $\dfrac{\partial v}{\partial y}(1,-1)$.

8. Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{F}(x,y)=(x^3-y^3+2xy, x+2y)$.

   (a) Muestra que $\mathbf{F}$ es invertible en algún abierto U que contiene al punto $(1,-1)$.

   (b) Si $\mathbf{G}$ es la inversa de $\mathbf{F}$ restringida a U, y notando que $\mathbf{F}(1,-1)=(0,-1)$, calcula $\mathrm{D}\mathbf{G}(0,-1)$.

9. ¿Cuál es el volumen del sólido en el espacio xyz acotado por las superficies $y=x$, $y=x^2$, $z=0$, y $z=x+y$?

10. ¿Cuál es el volumen del sólido en el espacio xyz acotado por el paraboloide $z=-x^2-y^2+1$ y el plano $z=0$?

11. Encuentra el valor de $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, donde

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1,\ x+y\ge 1\}.$$

12. Sea $D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\}$. Encuentra el valor de $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$.

13. Demuestra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

14. Sea D la región en el plano xy encerrada por las curvas $y=x^2+1$ y $y=x^3+1$. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continua. Escribe $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ como una integral de la forma $\displaystyle\int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$, y como una integral de la forma $\displaystyle\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$.

15. Sea $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{T}(u,v)=(4u,2u+3v)=(x,y)$. Si $D^*=[0,1]\times[0,2]$ y $D=\mathbf{T}(D^*)$, dibuja D en el plano xy y encuentra el valor de $\displaystyle\iint_D xydxdy$.

16. Sea $D=[-1,1]\times[2,5]$. Si $f:D\to\mathbb{R}$ es continua y $\displaystyle\iint_D \sqrt[3]{1+f(x,y)}dxdy=4$, muestra que existe $(x_0,y_0)\in D$ tal que $f(x_0,y_0)=-19/27$.

17. Sea D_a la región en el plano xy encerrada por un triángulo con vértices $(0,0)$, $(a,0)$, y $(0,a)$ con $a>0$. Encuentra $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{\iint_{D_a}(xy+1)^3e^{x^2-y+1}dxdy}{a^2}$.

18. Sea $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $T(u,v)=(e^u-3v, uv^2-2v)$. Suponer que D_1 y D_2 son dos regiones planas acotadas elementales tales que $\mathbf{T}(D_2)=D_1$, con $\mathbf{T}$

inyectiva en D_2. Reescribe $\iint_{D_1} (x-y)\cos(x^2-y^2)dxdy$ como una integral de la forma $\iint_{D_2} g(u,v)dudv$, indicando explícitamente $g(u,v)$.

19. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua tal que $\iint_D f(x,y)dxdy = 0$ para todo disco cerrado D en el plano xy. Muestra que $f(x,y)=0$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

20. Encuentra el valor de las siguientes integrales dobles:

    (a) $\iint_D x^2 e^{xy} dxdy$, $D=[0,1]\times[0,1]$.

    (b) $\iint_D |x||2y-1|dxdy$, $D=[-1,1]\times[0,1]$.

21. Sea D la región en el plano xy encerrada por el paralelogramo con vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$ y $(3,2)$. Encuentra el valor de $\iint_D (2x+y)dxdy$ haciendo un cambio de variables tal que el dominio de integración sea el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$.

22. Sea D la región en el plano xy encerrada por las curvas $x=y^2$ y $y=x-2$. Encuentra el valor de $\iint_D (x^2+y)dxdy$.

23. Encuentra el valor de $\iint_D (x+2y)dxdy$, donde $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 4,\ x\le 0\}$.

24. Si $D=[-1,1]\times[-1,2]$, demuestra que $1 \le \iint_D \frac{1}{x^2+y^2+1}dxdy \le 6$.

25. Si D es la región plana delimitada por un triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$, demuestra que

$$\frac{1}{6} \le \iint_D \frac{1}{y-x+3}dxdy \le \frac{1}{4}.$$

26. Sea D la región sólida en $\mathbb{R}^3$ acotada por el cilindro $x^2+y^2=4$ y los planos $z=x-y$, $z=4$. Escribe $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ como una triple integral iterada.

27. Sea $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 9,\ z\ge 0\}$ una semiesfera sólida. Escribe D en la forma

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le \phi_2(x),\ \psi_1(x,y)\le z\le \psi_2(x,y)\}.$$

28. Encuentra el valor de $a>0$ tal que $\iiint_D z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz = 3$, donde

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 4,\ z\in[0,a]\}.$$

29. Encuentra el valor de $\iiint_D (x+4y+z)dxdydz$, donde

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \le 0,\ z \le 0\}.$$

30. Sea D la pirámide sólida en el espacio xyz con vértices $(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,2)$. Escribe $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ como una integral triple iterada.

31. Sea $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{T}(u,v,w) = (3u-v, u+v-w, u)$. Sea $D^* = [0,1] \times [-1,0] \times [0,2]$. Encuentra el valor de $\iiint_D (x+2z)dxdydz$, donde $D = \mathbf{T}(D^*)$.