CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 11
Otoño 2022
Integrales trigonométricas. Sustitución trigonométrica. Fracciones parciales

1. Encuentra las siguientes integrales trigonométricas:

   (a) $\int \cos^2\left(\sqrt{y}\right)\, dy.$

   (b) $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\, dx.$

   (c) $\int \operatorname{senh}^3(x)\cosh^2(x)\, dx.$

   (d) $\int \tan^5(x)\, \sec^4(x)\, dx.$

   (e) $\int \tan^3(x)\, \sec^5(x)\, dx.$

   (f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}\, dx$

   (g) $\int \csc^3(x)\, dx.$

   (h) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3(x)\, dx.$

   (i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}\, dx.$

2. Demuestra que para $m, n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = 0.$

   (b) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \pi, & \text{si } n = m. \end{cases}$

3. Usando una sustitución trigonométrica determina las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{21+4x-x^2}} dx.$

   (b) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}^{-1}(x)\, dx.$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx.$

   (d) $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\, dx.$

   (e) $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\, dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}.$

4. Demuestra que
$$\int \sqrt{a-bx^2}dx = \frac{x\sqrt{a-bx^2}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} \operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\ x\right) + C, \quad 0 < b < a.$$

5. Usando la sustitución $u = \sec(x)$ demuestra que
$$\int \sec(x)dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C.$$

6. Utiliza fracciones parciales para determinar las siguientes integrales:
   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + x^2 - 2x}$.
   (b) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\ dx$.
   (c) $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 3x^2 + 5x + 3}{1 - x^4}\ dx$.

7. Determina
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}. \quad \text{(Usa una sustitución trigonométrica.)}$$
Ahora obtén
$$\int \frac{2 - x + x^2 - x^3}{(x^2+1)^2} dx.$$

8. Usando el cambio de variable indicado, determina la primitiva de cada una de las siguientes funciones:
   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}, \quad u = \cosh x.$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x\,(1 + \cos x)}, \quad u = \cos x.$

9. Usa fracciones parciales para obtener
$$\int \frac{dx}{ax(bx+c)}, \quad a, b, c > 0.$$
Ahora obtén
$$\lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{dx}{ax(bx+c)}.$$

10. Determina
$$\int \frac{dx}{e^{2x} - e^x}. \quad \text{(Cambia variables y usa fracciones parciales.)}$$
Ahora obtén
$$\lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{dx}{e^{2x} - e^x}.$$