Cálculo Diferencial e Integral I

Ejercicios para el Laboratorio 9

Tasas relacionadas

1. Una mujer corre en dirección norte a razón constante de 10km/h. La mujer cruza un punto P y diez minutos después un hombre corre desde el mismo punto P en dirección oeste a razón constante de 9km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los corredores 20 minutos después de que el hombre parte del punto P?

2. Se infla un globo esférico introduciendo aire a razón de $20\text{cm}^3/\text{min}$. Calcular la rapidez de cambio del radio del globo cuando su diámetro es de 3cm.

3. Las longitudes de los lados x, y y z de una caja rectangular cerrada cambian de tal forma que cuando las aristas x y z aumentan un centímetro por segundo, la arista y decrece a razón de 2cm/s. Determina la tasa a la que cambia el volumen y el área de la superficie de la caja en el instante en que $x = 4$, $y = 3$ y $z = 2$.

4. En una caja rectangular cerrada las aristas x y z aumentan a tasa constante 1cm/s, mientras que la arista y decrece a razón constante de 2cm/s. Determina la tasa a la que cambia el volumen y el área de la superficie de la caja, en el instante en que $x = 4$, $y = 3$ y $z = 2$.

5. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $y = \sqrt{1 + x^3}$. En el momento que la partícula alcanza el punto $(2, 3)$, la coordenada y se incrementa a una rapidez de 4cm/s ¿Qué tan rápido cambia la coordenada x de la partícula en ese instante de tiempo?

6. Un papalote que está a 20m del piso se desplaza en forma horizontal a una rapidez de 4 m/s. ¿Con qué velocidad disminuye el ángulo entre la cuerda y el piso cuando se han soltado 100m de cuerda?

7. Una bola de nieve se funde de tal modo que el área superficial disminuye a razón de $1\text{cm}^2/\text{min}$. Determinar la rapidez a la cual disminuye el diámetro de la bola de nieve cuando este sea de 10cm.

Teorema Rolle y Teorema Valor Medio

8. Demostrar que la función $f(x) = x^5 + 2x^3 + 4x - 12$ tiene exactamente un cero real.

9. Supongamos que la función f es es continua en $[a, b]$ y que $f'(x) = 1$ para toda $x \in (a, b)$. Demuestra que $f(x) = x - a + f(a)$ para toda $x \in [a, b]$.

10. Usa el teorema de Rolle para demostrar que si cualquier polinomio de cuarto grado tiene a lo más cuatro raíces reales entonces todo polinomio de grado cinco tiene a lo más 5 raíces reales.

11. Demuestra que si $f(0) = g(0)$ y si $f'(x) \leq g'(x)$ para todo $x \geq 0$ entonces $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq 0$.

12. Sea $f(x) = \sqrt{4x - 3}$, determina el número c que satisfaga el TVM para $f(x)$ en el intervalo $[1, 3]$.

13. Considera una función $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ continua, que es diferenciable en $[-1, 1]$, y que satisface $f'(x) \neq 1$, $\forall x \in (-1, 1)$. Demuestra que existe un único valor $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$, es decir, que existe un único punto fijo.
Sugerencia: primero demuestra que existe al menos un punto fijo c, posteriormente demuestra la unicidad suponiendo que existe otro punto fijo diferente $\tilde{c} \in [0, 1]$ y aplica el TVM al intervalo con extremos en c y $\tilde{c}$.