

Cálculo Diferencial e Integral I

Ejercicios para el Laboratorio 8

Teorema de Bolzano

1. Supón que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que para toda x en $[0, 1]$, $f(x) \neq 0$ y tal que $f(0) = 2$. Demuestra que $f(x) > 0$ para todo x en $[0, 1]$.
2. Supón que $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función continua tal que $f(1/2) \neq 1$. Considera la función $g(x) = 4x(1 - x)$. Prueba que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene al menos dos soluciones en $[0, 1]$. ¿Por qué se pide $f(1/2) \neq 1$?
3. Sea $f(x)$ una función continua en $[0, 1]$ con $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$, es decir, la gráfica de $y = f(x)$ está contenida en el intervalo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$. Demuestre que la gráfica de $y = f(x)$ corta ambas diagonales de dicho cuadrado.

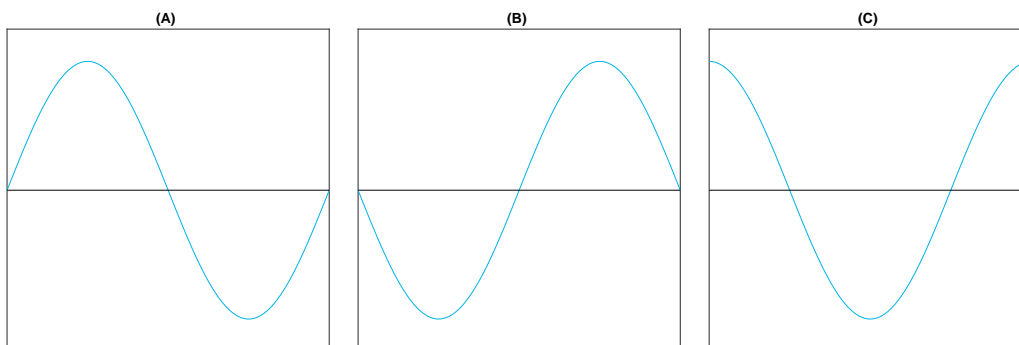
Definición derivada

4. Utiliza la definición de derivada para encontrar $f'(1)$ si $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

Interpretación geométrica derivada

5. Considera la recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(4, 6)$. ¿Es tangente esta recta a la gráfica de la función $y = x^2$ en algún punto? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la gráfica en $(1, 1)$? ¿Tiene sentido preguntar por la recta tangente a la gráfica en $(4, 6)$?
6. ¿En qué puntos tiene tangente vertical la función $y = (x - 4)^{1/3}$?
7. Determinar los valores de a y b de tal forma que la hipérbola $y = \frac{1}{ax + b}$ pase por el punto $(0, 1/3)$ con recta tangente $y = -x + 1/3$.

8. Asigna etiquetas $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ a las siguientes gráficas de manera que $f'(x) = g(x)$ y que $g'(x) = h(x)$. Incluye una explicación detallada de tu asignación (no es correcto dar una regla de correspondencia particular a las funciones).



Derivada de funciones

9. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \left(\cos \left(\frac{x^3 + 3}{x^4 + 2} \right) \sin(\sqrt{2x}) \right)$

(b) $f(x) = \tan^3(\cos(3x))$

(c) $h(t) = \left(\frac{t^2 - 4}{t^2 + 4} \right)^8$

(d) $g(x) = \sqrt{(1 - 7x)^2 + \sqrt{7x - 1}}$

Derivada puntual

10. Calcula la derivada de la función $h(x) = (g \circ (\sqrt{f}))(x)$ en $x = 1$ si se sabe que

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 2, \quad g'(1) = -3.$$