Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2022

Ejercicios adicionales para el segundo examen parcial

Los siguientes ejercicios son de práctica para los temas que se incluirán en el segundo examen parcial (revisar también los ejercicios de los Laboratorios del 5 al 9):

a) Gradientes y derivadas direccionales
b) Derivadas de orden superior
c) Aproximaciones lineales y cuadráticas
d) Matrices definidas positivas, definidas negativas
e) Criterio de la segunda derivada

1. Sea $\vec{v} = (1, -1, 3)$ y $f(x, y, z) = x - y^2 + 3z^3$. Encuentra la derivada direccional de f en la dirección de $\vec{v}$ en el punto $(1, 1, -2)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 - 3xyz + z^3 y - 1$. Encuentra la dirección en la que f crece más a partir del punto $(2, 1, -1)$.

3. Si $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ representa la altura de una montaña en la posición (x, y), ¿en qué dirección en el plano xy desde $(1, 0)$ crece más la altura de la montaña? ¿Cuál es el valor de la máxima razón de crecimiento en el punto $(1, 0)$?

4. ¿En qué dirección es igual a cero la derivada direccional de $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ en el punto $(1, 1)$?

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$. Muestra que no existe un vector $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que la derivada direccional de f en la dirección de $\vec{v}$ en el punto $(-1, 1)$ vale 2.

6. Sea $f(x, y) = x^2 - 3y^2$. ¿Existirá una derivada direcional de f en el punto $(-1, 1)$ cuyo valor sea 20?

7. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\vec{x_0}$ tal que $\nabla f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. Muestra que la derivada direccional de f en el punto $\vec{x}_0$ en la dirección de $\nabla f(\vec{x}_0)$ vale $\|\nabla f(\vec{x}_0)\|$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Sean $\vec{v}_1 = (1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, -1)$. Supón que en el punto (x_0, y_0) las derivadas direccionales de f en las direcciones de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ valen 3 y -1 respectivamente. Encuentra el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. ¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de f en el punto (x_0, y_0)?

9. Encuentra la ecuación del plano tangente a la superficie en $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = -3xyz$ en el punto $(1, -1, 2)$.

10. Encuentra un vector no nulo y normal a la superficie descrita por

$$3x^2 - z^2 - 2x - 7 = \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$$

en el punto $(2, -2, 1)$.

11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 - 3y + 2xy^2$. Sea γ la curva de nivel de f que pasa por el punto $(1, -2)$. Encuentra un vector en $\mathbb{R}^2$ que sea perpendicular a dicha curva en el punto $(1, -2)$. Encuentra la ecuación de la recta tangente a γ en el punto $(1, -2)$ en la forma $y = mx + b$.

12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Sea $w = f(x, y)$ y sean $x = u^2 - v$, $y = 3u$. Muestra que $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}(u, v) = -2u\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2 - v, 3u) - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u^2 - v, 3u)$.

13. Prueba que no existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y, z)$, de clase C^3 y tal que para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la matriz hessiana de f en (x, y, z) es

$$\begin{pmatrix} 2 & -x & 1+y \\ -x & -y & 0 \\ 1+y & 0 & z \end{pmatrix}.$$

14. Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 es tal que $\nabla f(x, y) = (x^2 + cy^2, 8xy + 1)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde c es una constante. Encuentra el valor de c.

15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $f(1, 1, 1) = 3$, $\nabla f(1, 1, 1) = (2, -1, 1)$ y $H_f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Sean L y Q las aproximaciones lineal y cuadrática respectivamente de f en $(1, 1, 1)$. Encuentra el valor de $L(1, 0, -1)$ y de $Q(1, 0, -1)$.

16. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 + 2x_2 + ... + nx_n)^2 = \left(\sum_{p=1}^{n} px_p\right)^2$.

    Sea L la aproximación lineal de f en $(1, 1, 1, ..., 1)$. Muestra que $L(3, 3, 3, ..., 3) = \dfrac{5}{4}n^2(n + 1)^2$.

17. Sea f como en el problema anterior, y sea Q la aproximación cuadrática de f en $(1, 1, 1, ..., 1)$. Encuentra el valor de $Q(3, 3, 3, ..., 3)$. *Sugerencia*: ¿Por qué para esta función f se cumple $Q(\vec{x}) = f(\vec{x})$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$?

18. Encuentra todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

es definida positiva.

19. Encuentra todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

es definida negativa.

20. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Muestra que si $a_{11}a_{22} - a_{21}^2 \leq 0$, entonces A no es ni definida positiva ni definida negativa.

21. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy + y^3$. Encuentra todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para los cuales la matriz hessiana de f en (x, y), $H_f(x, y)$, es definida positiva.

22. Sea $f(x, y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Encuentra los puntos críticos de f y clasifícalos como máximos locales, mínimos locales, puntos silla.

23. Sea $f(x, y) = (x^2 - y^2)(x + 2y)$. Muestra que $(0, 0)$ es un punto silla de f.

24. Determina la naturaleza de los puntos críticos de las siguientes funciones:

    a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.
    b) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$.
    c) $f(x, y) = xy + 1/x + 8/y$.

25. Dados m puntos en el plano xy, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_m, y_m)$, el problema de ajustar una curva $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ a los m puntos en el sentido de *mínimos cuadrados* consiste en encontrar el mínimo de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(a_0, a_1, a_2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i)^2$. Muestra que la igualdad $\nabla f(a_0, a_1, a_2) = (0, 0, 0)$ equivale al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{pmatrix},$$

donde las sumatorias se toman desde $i = 1$ hasta m.