

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 8

Otoño 2022

Funciones trigonométricas inversas

1. Simplifica la expresión $\sec(\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x})$.
2. Prueba que

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{sen}^{-1}(x), \quad \text{si } |x| < 1.$$

Sugerencia: Deriva ambos lados. Verifica, dibujando el triángulo.

3. Halla el valor exacto de $\operatorname{sen}\left(\arctan\frac{1}{2} + \arccos\frac{4}{5}\right)$.
4. Halla el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:
 - (a) $f(x) = \sec^{-1}(\ln x)$.
 - (b) $f(x) = 3 \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x^2 - 1})$.

5. Considera la función definida por

$$f(x) = -\pi + \cos^{-1}(1 - \ln x).$$

- (a) Determina: (i) el dominio de f , (ii) la imagen (rango) de f , (iii) los ceros de f , (iv) las soluciones de la ecuación $f(x) = -\pi$.
- (b) Demuestra que f es inyectiva.
- (c) Caracteriza la función inversa de f (dominio, imagen y regla de correspondencia).

6. Sea

$$f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2 + 1} dt + \int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt, \quad \text{con } x > 0.$$

- (a) Sin resolver la integral, demuestra que f es constante.
- (b) Resolviendo la integral, demuestra que la constante es $\pi/2$. Sugerencia: $\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}(1/x)$.

7. Sea $f(x) = 2^{-x} - \int_0^{\operatorname{arcsen} x} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^6 t} dt$, $x \in [-1, 1]$.

- (a) Justifica que f es invertible en el intervalo $(-1, 1)$.
- (b) Sea g la función inversa de f . Demuestra que $g'(1) = -\frac{1}{\ln(2e)}$.

8. Determina las siguientes integrales:

(a) $\int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$.

(b) $\int_{-2}^{2\sqrt{3}-2} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$.

(c) $\int_{-b}^{-b/2} \frac{dx}{\sqrt{-2bx - x^2}}$, $b > 0$.

9. Determina una primitiva de la función $f(x) = \sec(x)$, efectuando el cambio de variable $t = \sen(x)$. Sugerencia: Integra usando la sustitución indicada y luego utiliza la identidad $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$.

10. (a) Prueba que

$$\int \operatorname{sech}(x) dx = \tan^{-1}(\sinh(x)) + C.$$

Sugerencia: $\int \operatorname{sech}(x) dx = \int \frac{1}{\cosh(x)} dx = \int \frac{\cosh(x)}{\cosh^2(x)} dx$.

(b) Prueba también que

$$\int \operatorname{sech}(x) dx = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh(x)) + C. \quad (\text{Derivar.})$$