

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 7

Otoño 2022

Funciones hiperbólicas y sus inversas

1. Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}$:

(a) $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$.

(b) $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$.

2. Determina el dominio y la derivada de la función en cada inciso:

(a) $f(x) = \coth(\ln x)$.

(b) $f(x) = \cosh^2(\sqrt{2 - e^x})$.

3. Sean

$$A(\theta) = \frac{1}{2} \sin(\theta) \cos(\theta) + \int_{\cos(\theta)}^1 \sqrt{1-t^2} dt, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

y

$$B(x) = \frac{1}{2} \sinh(x) \cosh(x) - \int_1^{\cosh(x)} \sqrt{s^2 - 1} ds, \quad x \geq 0.$$

Prueba que $A(\theta) = \frac{\theta}{2}$ para todo θ y $B(x) = \frac{x}{2}$ para todo x . (Sugerencia:

$A'(\theta) = \frac{1}{2}$ y $B'(x) = \frac{1}{2}$ por la regla de Leibniz.)

4. Determina las siguientes integrales y simplifica la respuesta:

(a) $\int_0^{\ln 2} e^{-x} \sinh(x) dx$.

(b) $\int_0^{\ln 10} 4 \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

(c) $\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \sqrt{1 + \cosh(x)} dx$.

5. A partir de las definiciones de las funciones $\cosh(x)$ y $\tanh(x)$ muestra que

(a) $\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$.

(b) $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$.

6. Determina el dominio y la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \cosh^{-1}(2\sqrt{1-x})$.

(b) $f(x) = \tanh^{-1}(1/2)^x$.

7. Considera la función definida por

$$f(x) = 1 + \cosh^{-1}(3 - \ln(2x)).$$

- (a) Determina el dominio y la imagen de f .
- (b) Demuestra que f es monótona y por tanto posee una inversa.
- (c) Caracteriza la función inversa de f (dominio, imagen y regla de correspondencia).

8. Simplifica $\cosh(\sinh^{-1}(x))$, $x \in \mathbb{R}$.

9. Resuelve la siguiente ecuación (valor explícito de x):

$$\sinh^{-1}(x) + \cosh^{-1}(x + 2) = 0.$$

10. Determina las siguientes integrales:

- (a) $\int \frac{x - \sinh^{-1}(2x)}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx.$
- (b) $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$. Da la respuesta en términos de logaritmos.
- (c) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4 + x^2}}$. Da la respuesta en términos de logaritmos.
- (d) $\int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 8x - 5}}$.

11. Halla una primitiva de la función $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$, efectuando el cambio de variable $x = \cosh(t)$.

12. Usando la sustitución $x = \cosh(u)$, demuestra que para $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^{\cosh(t)} x^2 \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{32} \sinh(4t) - \frac{t}{8}.$$