

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 5

Otoño 2022

Función exponencial natural

1. Resuelve la ecuación $3e^x + 2e^{-x} = 7$.
2. Encuentra una fórmula para la inversa de $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
3. Determina la derivada y' en cada inciso:
 - (a) $y = \frac{1}{e^{2x} \ln x}$.
 - (b) $y = \int_1^{e^{(x^2)}} \ln^2(\sqrt{t}) dt$. Simplifica el resultado.
 - (c) $y = \int_0^{3x} e^{t^2 - 9x^2} dt$. Simplifica el resultado.
4. Sea $f(x) = 2e^{3x} + \int_0^x \sqrt{3 + 2t^4 + t^6} dt$, $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) Justifica que f es diferenciable.
 - (b) Demuestra que f es creciente, y por tanto posee una inversa f^{-1} .
 - (c) Encuentra $(f^{-1})'(2)$.
5. Determina la integral en cada inciso:
 - (a) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$.
 - (b) $\int_{-\ln 3}^0 \sqrt{e^x} dx$.
 - (c) $\int \frac{\tan(e^{-3x})}{e^{3x}} dx$.
 - (d) $\int e^{(x-e^x)} dx$.
 - (e) $\int_0^3 \frac{e^{1+\ln x}}{\sqrt{1+x^2}} dx$.
 - (f) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx$.
 - (g) $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{1 - e^x} dx$.

6. Encuentra el valor de a y la función $f(x)$ que satisfacen

$$a + \int_a^{x^2} \frac{f(t)}{t} dt = e^x + x^2 - e, \quad \text{con } x > 0.$$

7. Sea $f(x) = e^{(2-x)a} e^{xb}$, $a \neq b$. Demuestra que existe $c \in [0, 2]$ tal que

$$f(c) = \frac{e^{2b} - e^{2a}}{2b - 2a}.$$

8. Sea

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} e^{t+(1/t)} dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Mediante un cambio de variable adecuado demuestra que $F(1/x) = -F(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

9. (a) Obtén las coordenadas del máximo absoluto de $\frac{\ln(x)}{x}$ en $(0, \infty)$.
(b) Usando el inciso anterior, demuestra que $x^e \leq e^x$ para todo $x > 0$, y $x^e = e^x$ si y sólo si $x = e$.