

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 4

Otoño 2022

Función logaritmo natural. Funciones inversas

1. A partir de la gráfica de $y = \ln x$ bosqueja la gráfica de las siguientes funciones, proporcionando el dominio de cada una de ellas:

(a) $y = \ln(1/x)$.

(b) $y = \frac{1}{\ln x}$.

(c) $y = \ln|x|$.

(d) $y = |\ln x|$.

2. Proporciona el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:

(a) $f(x) = (\ln x) \ln(\sin x)$.

(b) $f(x) = \frac{1}{\ln x} + \ln(1/x)$.

(c) $f(x) = \ln(\sqrt{-\ln x})$.

(d) $f(x) = \ln^2\left(\frac{3x+2}{x^4}\right)$.

(e) $f(x) = \int_x^{x^3} \ln(x^2 - 1) \sqrt{\cos(t) + 1} dt$.

3. Usa derivación implícita para calcular dy/dx , si $y = \ln(xy^2)$.

4. Determina las siguientes integrales:

(a) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$. (Observa que $\ln e = 1$.)

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 2x}$.

(c) $\int \frac{1}{x + x \sin(\ln(x))} dx$.

(d) $\int (1 + \ln x) \cot(x \ln x) dx$.

(e) $\int_1^8 \frac{dt}{3 + \sqrt{t+8}}$. Utiliza la sustitución $u = 3 + \sqrt{t+8}$.

5. Utiliza derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{(x^2 + 1)^{5/2} \sqrt{2 + \sin x}}$$

6. (a) Prueba que si $t \geq 1$, entonces $\frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$, y de aquí obtén que

$$0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2, \quad \text{para toda } x \geq 1.$$

- (b) Concluye que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

7. Determina una función diferenciable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea par, con $f(0) = 0$ y tal que

$$\ln(1 + f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{1 + f(\sqrt{t})} dt, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

8. Sea $L : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(1+t)}{t} = 1. \quad (*)$$

Prueba que $L(x) = \ln x$, para todo $x > 0$.

Sugerencia: Prueba que $L(1) = 0$ y usa (*) para demostrar que $L'(x) = 1/x$.

9. En cada inciso encuentra un intervalo en el que f tenga una inversa (halla un intervalo en el que $f' > 0$ o $f' < 0$). No es necesario encontrar f^{-1} .

(a) $f(t) = t^4 + 2t^2 + 1$.

(b) $f(x) = \int_{x^2}^x \ln t \, dt$, $0 < x < 1$.

10. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$.

(a) Muestra que f es diferenciable y creciente en \mathbb{R} .

(b) Si f^{-1} denota la inversa de f , calcula $\frac{d}{dx} f^{-1}(9)$. (Nota que $f(2) = 9$.)