Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2022

Laboratorio 5: Gradientes y Derivadas Direccionales

1. Sea S la superficie en el espacio xyz dada por la ecuación $e^{x+2z} + z^2 = xyz + 4$.
   (a) Encuentra un vector no nulo en $\mathbb{R}^3$ que sea normal a S en el punto $(2, 1, -1)$.
   (b) Encuentra la ecuación del plano tangente a S en el punto $(2, 1, -1)$.

2. (Tomado del examen de muestra GRE de Matemáticas) Sea g la función definida por $g(x, y, z) = 3x^2y + z$ para cualesquiera x, y, z reales. ¿Cuál de los siguientes números es el más cercano al valor exacto de la derivada direccional de g en el punto $(0, 0, \pi)$ en la dirección del vector $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$? (Nota: $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son los vectores de la base canónica en $\mathbb{R}^3$ $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ respectivamente.)
   A) 0.2 B) 0.8 C) 1.4 D) 2.0 E) 2.6

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 - 3xy + 2xy^2$. Sea γ la curva de nivel de f que pasa por el punto $(2, -2)$. Encuentra un vector no nulo en $\mathbb{R}^2$ que sea perpendicular a dicha curva en el punto $(2, -2)$. Encuentra la ecuación de la recta tangente a γ en el punto $(2, -2)$ en la forma $y = mx + b$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(2, 1) = -4$ y $\nabla f(2, 1) = (3, 4)$. Dada la curva en el plano xy descrita por la ecuación $x^2y + f(x, y) = 0$, encuentra un vector tangente a dicha curva en el punto $(2, 1)$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Suponer que γ es una curva de nivel de f que puede ser parametrizada por una trayectoria de clase C^1, $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, y tal que en t_0 se cumple que $\mathbf{c}'(t_0) \neq (0, 0)$, con $\mathbf{c}(t_0) = (x_0, y_0)$. ¿Cuánto vale la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección del vector $\mathbf{c}'(t_0)$?

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$ linealmente independientes . Supongamos que en un punto (x_0, y_0) se conocen los valores de las derivadas direccionales de f en las direcciones de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Describe cómo encontrar la dirección de máximo crecimiento de f en el punto (x_0, y_0) usando los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y las derivadas direccionales respectivas de f en (x_0, y_0).

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y, z) = x^2 - 3xyz + z^3y - 1$. Encuentra la dirección en la que f crece más a partir del punto $(2, 1, -1)$. ¿Cuál es el valor de la máxima razón de crecimiento en dicho punto?

8. La distribución de temperaturas (en grados Celsius) sobre la superficie de un lago de aguas termales está dada por la función $T(x, y) = (-x^2 - 2y^2 + xy)/3 + 50$, para $x \in [-8, 8]$, $y \in [-4, 4]$ en coordenadas rectangulares. Un pato se encuentra en el punto $(6, -3)$ sobre el lago. ¿En qué dirección sobre la superficie del lago debe comenzar a nadar el pato si desea seguir la dirección de máximo descenso de la temperatura?

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - \dfrac{y^2}{4}$. Muestra que no existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que la derivada direccional de f en el punto $(1/2, 2)$ en la dirección de $\vec{v}$ sea 4.