Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2022

Laboratorio 3: Derivadas parciales, diferenciación, planos tangentes

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$. Sea $z = T(x,y)$ la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, 2, -7)$.
   (a) Encuentra la ecuación del plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $(1, -1, 3)$ y que es paralelo al plano $z = T(x,y)$.
   (b) Encuentra un vector no nulo que sea ortogonal al plano $z = T(x,y)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1,-2+h) - f(1,-2)}{h} = 4$. Supón que a es una constante tal que
$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{|f(x,y) - (f(1,-2) + (a+1)(x-1) + (3a-1)(y+2))|}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}} = 0.$$
   Encuentra el valor de las derivadas parciales de f en el punto $(1, -2)$.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $\mathbf{F}(\vec{x}) = A\vec{x}$. Muestra que la derivada de $\mathbf{F}$ en $\vec{x}$, denotada por $\mathrm{D}\mathbf{F}(\vec{x})$, es A para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
   Nota: La derivada de una función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en $\vec{x}$ también es conocida como *matriz jacobiana* de $\mathbf{F}$ en $\vec{x}$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x,y)$, diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. Muestra que si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son constantes, entonces f es de la forma $f(x,y) = ax + by + c$, donde a, b, c son constantes.

5. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 - x_2, x_1^2 + x_2x_3, x_3^3 - x_1x_2)$. Calcula $\mathrm{D}\mathbf{F}(2, 2, 1)$.

6. Sea A una matriz de n por n con entradas reales cuya entrada (i,j) es a_{ij}. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \vec{x}^T A\vec{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. Muestra que $\nabla f(\vec{x}) = ((A + A^T)\vec{x})^T = \vec{x}^T(A + A^T)$. *Sugerencia*: para calcular la parcial respecto a x_p, $p = 1, .., n$, observar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{pp}x_p^2 + \sum_{i=1,i\neq p}^{n} a_{ip}x_ix_p + \sum_{j=1,j\neq p}^{n} a_{pj}x_px_j + \sum_{i=1,i\neq p}^{n}\sum_{j=1,j\neq p}^{n} a_{ij}x_ix_j$.