Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2022

Ejercicios de práctica para el primer examen parcial departamental

Los temas del primer examen parcial departamental son los siguientes :

a) Curvas y conjuntos de nivel.
b) Conjuntos abiertos, cerrados, frontera.
c) Límites y continuidad.
d) Derivadas parciales, diferenciación, planos tangentes.
e) Trayectorias, regla de la cadena (parte I).

Ejercicios de práctica (revisar también los Laboratorios del 1 al 4, y los problemas de exámenes pasados):

Curvas de nivel y conjuntos de nivel

1. Dibuja las curvas de nivel de $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ correspondientes a los valores $c = 1$, $c = e$, $c = 1/e$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - 4xy + 5y^2$. Muestra que el conjunto de nivel de f correspondiente al valor -1 es el conjunto vacío. Dibuja la curva de nivel correspondiente al valor $c = 0$.

3. El punto $(3,4)$ pertenece a una curva de nivel de f, con $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - 3$. Dibuja la curva.

4. El punto $(-3,4)$ pertenece a una curva de nivel de f, con $f(x,y) = x^2 + y^2 - 9$. Dibuja dicha curva.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = ax^2 + 2x + 4y^2 + 1$. Encuentra el valor de la constante a para el cual se cumple que el punto $(-2,1)$ pertenece a la curva de nivel correspondiente al valor $c = -3$.

6. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3$, $g(x,y) = x - y - 1$. Encuentra los puntos en $\mathbb{R}^2$ que están tanto en la curva de nivel de f como en la de g correspondientes al valor $c = 2$.

7. Dibuja la curva de nivel de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 2y$ correspondiente al valor 1.

8. Dibuja la curva de nivel de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - x$ correspondiente al valor 0.

9. Dibuja las curvas de nivel de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x/y$ correspondientes a los valores $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.

10. Dibuja las curvas de nivel de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \max(|x|, |y|)$ correspondientes a los valores $c = 0, 1, 2$.

11. Dibuja o describe las superficies en $\mathbb{R}^3$ descritas por las ecuaciones siguientes:

    (a) $4x^2 + y^2 = 16$

    (b) $z = x^2$

    (c) $y^2 + z^2 = 4$

    (d) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{9} = 1.$

12. Sea S la superficie en $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $x^2y^6 - 2z = 3$.

    (a) Encuentra una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y, z)$, tal que S sea el conjunto de nivel de f correspondiente al valor $c = 4$.

    (b) Encuentra una función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g = g(x, y)$, tal que S sea la gráfica de g.

13. Dibuja la gráfica representada por la ecuación $x = 1$ en los siguientes casos:

    (a) Como una ecuación en $\mathbb{R}$ (eje x).

    (b) Como una ecuación en $\mathbb{R}^2$ (plano xy).

    (c) Como una ecuación en $\mathbb{R}^3$ (espacio xyz).

Conjuntos abiertos, cerrados, frontera

1. Encuentra la frontera del conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\} \cup \{3\}$.

2. Encuentra la frontera del conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$.

3. Notar que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ es abierto en $\mathbb{R}$. Demuestra que el conjunto $B = \{(x, 2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1\}$ no es abierto en $\mathbb{R}^2$.

4. Demuestra que el conjunto de números enteros es cerrado en $\mathbb{R}$.

5. Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tales que A es abierto y B es cerrado. Muestra que el conjunto C definido como $C = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \in A \text{ y } \vec{x} \notin B\}$ es abierto.

6. Si U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, justifica por qué la frontera de U está en el complemento de U.

Límites y continuidad

1. Demuestra que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y(x-y)}{x^4+y^4}$ no existe.

2. Demuestra que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$ no existe.

3. Demuestra que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$.

4. Demuestra que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{y} = 0$. *Sugerencia*: $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$. Demuestra que f no es continua en $(0,0)$.

Trayectorias en $\mathbb{R}^n$

1. Un objeto se mueve en el plano xy de tal manera que su posición al tiempo t es $\mathbf{r}(t) = (t-t^3, 2t+t^2)$ para $t \leq 2$. Al tiempo $t = 2$ el objeto comienza a moverse sobre una línea recta en dirección del vector $\mathbf{r}'(2)$ y a velocidad constante. Encuentra la posición del objeto al tiempo $t = 3$.

2. Repetir el ejercicio anterior pero con la trayectoria en $\mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{r}(t) = (2t, t^2, t^3 - 2t^2)$.

3. Una partícula se mueve sobre un círculo en el plano xy. Su posición al tiempo t está dado por $\mathbf{r}(t) = (\cos(t^2-t), \operatorname{sen}(t^2-t))$. Observar que la partícula se encuentra en la posición $(1,0)$ en los tiempos $t = 0$ y $t = 1$. Decide si la partícula se mueve en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido contrario para cada uno de los tiempos $t = 0$, $t = 1$.

4. El vector posición al tiempo t para una partícula que se mueve sobre una hélice es $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t^2)$.
   (a) Encuentra la velocidad de la partícula en el instante $t_0 = 4\pi$.
   (b) Encuentra una parametrización para la recta tangente a la curva descrita por la trayectoria $\mathbf{r}$ al tiempo $t_0 = 4\pi$.
   (c) ¿En qué punto la recta tangente intersecta al plano xy?

5. Sean $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$, $t \in [a,b]$, dos trayectorias diferenciables en $\mathbb{R}^n$. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$, donde $\cdot$ representa el producto punto de dos vectores. Muestra que $f'(t) = \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$ para toda $t \in [a,b]$.

6. Sea $\mathbf{r}(t)$ la posición de una partícula al tiempo t. Suponer que $\mathbf{r}$ es de clase C^2. La aceleración de la partícula al tiempo t se define como el vector $\mathbf{r}''(t)$. Muestra que si la partícula se mueve con rapidez constante, entonces la velocidad y la aceleración de la partícula al tiempo t son vectores ortogonales. Es decir, $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) = 0$ para toda t. *Sugerencia*: Escribe el cuadrado de la rapidez como un producto punto. Puedes usar el ejercicio anterior.

7. Sean $r = r(t)$ y $\theta = \theta(t)$, con $t \in \mathbb{R}$, dos funciones clase C^1 con valores reales tales que $r(t) > 0$. Sean $x(t)$ y $y(t)$ dadas por $x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$, $y(t) = r(t)\operatorname{sen}(\theta(t))$. Muestra que $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{x^2+y^2}\left(x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$. *Sugerencia*: Escribe $y(t)/x(t)$ en términos de la función tan y usa diferenciación implícita.

8. La curva descrita por la trayectoria

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (R(t - \operatorname{sen}(t)), R(1 - \cos(t))), \tag{1}$$

con R constante positiva, recibe el nombre de *cicloide*. Cuando un objeto viaja de un punto $\mathbf{P}_1$ a un punto $\mathbf{P}_2$ puede seguir muchos caminos. Si el objeto se mueve únicamente por la influencia de la gravedad, el camino que debe seguir para llegar lo más rápido posible a $\mathbf{P}_2$ es un arco de una cicloide suponiendo lo siguiente: el punto $\mathbf{P}_1$ está localizado a mayor altura que $\mathbf{P}_2$, la fuerza de gravedad se mantiene constante, el punto $\mathbf{P}_2$ no está directamente hacia abajo de $\mathbf{P}_1$ (en caída libre el objeto no pasa por $\mathbf{P}_2$).

Muestra que de (1) se obtiene:

$$1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{2R}{y}, \text{ para } y > 0.$$

Sugerencia: Usa la relación $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)$ junto con $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}$.

Diferenciación, planos tangentes, regla de la cadena

Nota: En algunos ejercicios se usa la notación f_x para denotar la derivada parcial de f respecto a x: $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Si F es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, se usa la notación $\mathrm{D}F(\vec{x})$ o bien $F'(\vec{x})$ para denotar la derivada de F en $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ serán denotadas en letras negritas cuando $m > 1$.

1. Encuentra la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f(x, y) = x^2 - 4y + e^{-2x^2+y}$ en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, -6)$.

2. Encuentra un vector normal unitario a la gráfica de $f(x, y) = x^2 - 4xy + x^3 - y^2$ en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, -10)$.

3. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$, $g(x, y) = x^3 + y^3 - x - 5y + 6$. Muestra que las gráficas de ambas funciones tienen el mismo plano tangente en el punto $(1, 1, 2)$.

4. Sea $h(x, y, z) = (x + z)e^{x-y}$. Encuentra $\nabla h(1, 1, -3)$

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y tal que $f'(7) = 3$. Sea h función dada por $h(x, y) = f(x^2 - 2y^2)$. Encuentra $\nabla h(3, 1)$.

6. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z, 1 - z^2 + 2x)$. Encuentra $\mathrm{D}\mathbf{F}(2, 1, 1)$.

7. Sea $z = \dfrac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}$ con $u = e^{2x-y}$, $v = 3e^{xy-2}$. Usa la regla de la cadena para encontrar el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ cuando $x = 1$, $y = 2$.

8. Sea $z = x^2 - \dfrac{x}{y}$, $x = u^2 + v^2$, $y = 3u - v$. Encuentra el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ cuando $u = 1$, $v = -1$.

9. Sea $z = f\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$ donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Muestra que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

10. Sea $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $G = G(x, y)$, función diferenciable. Supón que $y = y(x)$ es una función diferenciable definida implícitamente con la ecuación $G(x, y(x)) = 0$. Muestra que $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{G_x}{G_y}$ si $G_y \neq 0$.

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable y $z = f(x - y)$. Muestra que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

12. Sean $\mathbf{G}(u, v) = (e^u, u + \operatorname{sen}(v))$ y $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz)$. Calcula $\mathrm{D}(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})$ en $(0, 1, 0)$ utilizando la regla de la cadena.

13. Usa la regla de la cadena para calcular $\mathrm{D}(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(-2, 1)$ con $\mathbf{F}(u, v, w) = (v^2 + uw, u^2 + w^2, u^2v - w^3)$ y $\mathbf{G}(x, y) = (xy^3, x^2 - y^2, 3x + 5y)$.

14. Sea $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = uv$, $y = u\cos(v)$, $z = u\operatorname{sen}(v)$. Usa la regla de la cadena para hallar $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ cuando $(u, v) = (1, 0)$.

15. Sea $z = f(x, y)$ función diferenciable de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Si $x = r\cos(\theta)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)$, encuentra una fórmula para $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$. Para el caso $f(x, y) = x^2 + 3y^2$, calcula $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ cuando $r = 2$ y $\theta = \pi/4$.

16. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que $f(x, y) = f(y, x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Muestra que $f_x(a, b) = f_y(b, a)$.

17. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que $f(x, y) = f(x, xy)$ para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{G}(x, y) = (x, xy)$. Notando que $f(x, y) = f \circ \mathbf{G}(x, y)$ para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, aplica la regla de la cadena a $f \circ \mathbf{G}$ para demostrar que se cumplen las siguientes igualdades:

$$i) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, xy) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, xy), \quad ii) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial y}(x, xy).$$

18. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable y define $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $u(x, y) = xy\varphi\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$. Determina la función $\psi(x, y)$ de tal manera que u satisfaga

$$x^2u_x - y^2u_y = \psi(x, y)u.$$

19. Sean $\mathbf{c}(t) = (t^3, t^2, 2t)$ y $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y^2, 2xy, z^2)$. Encuentra una parametrización de la recta tangente a la curva descrita por la trayectoria $\mathbf{F} \circ \mathbf{c}$ cuando $t = 1$.

20. Sean $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciables. Define $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $g(x, y) = F(f(x, y))$. Muestra que el vector gradiente de g en (x, y) es paralelo al vector gradiente de f en (x, y).

21. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{x^2y^4}{x^4 + 6y^8}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$.

    (a) Muestra que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existen.

    (b) Muestra que f no es diferenciable en $(0, 0)$ viendo que f no es continua en $(0, 0)$.

22. Sea A una matriz de m por n con entradas reales. Define $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $\mathbf{F}(\vec{x}) = A\vec{x}$. Muestra que $\mathrm{D}\mathbf{F}(\vec{x}) = A$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

23. Sea $\mathbf{u}(x, y, z) = (x, y, z)$ y sea $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\|\mathbf{u}(x, y, z)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Demuestra que $\nabla f = -\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3}$.

24. Sean f y g funciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Suponer que f es diferenciable y $\nabla f(\vec{x}) = g(\vec{x})\vec{x}$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Demuestra que las esferas centradas en el origen están contenidas en los conjuntos de nivel de f; es decir, f es constante en dichas esferas.

25. Sea A una matriz de n por n con entradas reales cuya entrada (i, j) es a_{ij}. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \vec{x}^T A\vec{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. Muestra que $\nabla f(\vec{x}) = ((A + A^T)\vec{x})^T = \vec{x}^T(A + A^T)$. *Sugerencia*: para calcular la parcial respecto a x_p, $p = 1, .., n$, observar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{pp}x_p^2 + \sum_{i=1, i\neq p}^{n} a_{ip}x_ix_p + \sum_{j=1, j\neq p}^{n} a_{pj}x_px_j + \sum_{i=1, i\neq p}^{n}\sum_{j=1, j\neq p}^{n} a_{ij}x_ix_j$.