CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 3
Otoño 2022
Teorema Fundamental del Cálculo. Integral por sustitución.

1. Halla la derivada de la función en cada inciso (sin integrar):

   (a) $G(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (b) $G(x) = \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (c) $G(x) = \left(\int_0^x \sqrt{1+s^4}\, ds \right)^2.$

   (d) $G(x) = \int_0^1 x^2 \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (e) $G(x) = \int_0^x x^2 \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (f) $G(x) = \int_{-2x}^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (g) $G(t) = \int_{t^2}^{t^4} \frac{t^2}{1+\sqrt{x}}\, dx.$

2. Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \int_{\pi/2}^x x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ en $x = \frac{\pi}{2}$. Utiliza este resultado para estimar el valor de $f\left(\frac{\pi}{2} + 0.1\right)$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$g(x) = (x+1) \int_{-1}^x f(t)\, dt.$$

   (a) Demuestra que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Justifica que g es diferenciable en $\mathbb{R}$ y entonces calcula $g'(x)$.

4. Para $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ define

$$S(\theta) = \int_0^{\operatorname{sen}\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

   Usa la regla de Leibniz para probar que $S'(\theta) = 1$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Concluye que $S(\theta) = \theta$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

5. Calcula $f(2)$, si f es continua y tal que

$$\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x), \quad x \geq 0.$$

6. Calcula las siguientes integrales definidas:

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(x - \frac{5}{x^3}\right) dx.$

   (b) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\csc x}.$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec x \, \tan x \, dx.$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^5 x\right) dx.$

7. Determina las siguientes integrales indefinidas usando una sustitución:

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}.$

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\tan x)^5 \cos^2 x}.$

   (c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}} dx.$ Sugerencia: $\displaystyle\sqrt{\frac{x-1}{x^5}} = \frac{1}{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx.$

   (e) $\displaystyle\int \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}} dx.$

8. Calcula las siguientes integrales usando el método del cambio de variable para integrales definidas (haz una sustitución y cambia los límites de integración):

   (a) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} |\pi - 2x| \, dx.$

   (b) $\displaystyle\int_{-1/3}^{0} x\sqrt{1+3x} \, dx.$

9. Demuestra que si f es continua en el intervalo $[a,b]$ y $\lambda \neq 0$ es una constante, entonces:

   (a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x-\lambda)dx.$

   (b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\,dx.$

10. Sea f continua en $[a,b]$. Demuestra que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)\,dx.$$

11. Sea f continua en $[-a,a]$. Demuestra que

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\,dx.$$

12. Sean g diferenciable en $\mathbb{R}$, f continua en $\mathbb{R}$ y

$$h(x) = x^2\int_{g(x)}^{g(x^3)} f(t)dt.$$

   (a) Justifica que h es diferenciable y calcula su derivada.

   (b) Si f y g son impares, justifica si h es una función par, una función impar, o ninguna de éstas.