CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 2
Otoño 2022
Propiedades de la integral definida. Teorema del Valor Medio para Integrales

1. Sea f continua en $[a,b]$. Demuestra que existe $x \in [a,b]$ tal que
$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_x^b f(t)\,dt.$$
Sugerencia: Considera la función $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt$.

2. Calcula $\int_{-2}^{2} (2x+1+|2x+1|)\,dx$.

3. Determina $\int_{-2}^{a} |x|\,dx$. Analiza los casos $a \le 0$ y $a > 0$.

4. Prueba que $\dfrac{x^6}{\sqrt{2}} \le \dfrac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} \le x^6$, si $x \in [0,1]$. Concluye que
$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \le \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \le \frac{1}{7}.$$

5. A partir de las desigualdades
$$1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos x \le 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4, \quad \text{para } 0 \le x \le 1,$$
obtén cotas superior e inferior para $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$.

6. Sin efectuar la integral, demuestra que $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^4 x\,dx \ge \frac{\pi}{8}$.

7. Demuestra que si f es integrable en $[a,b]$, entonces
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$
Sugerencia: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$.

8. Sean $0 \le a < b$ y $f(x) = x^2$.
   (a) Muestra que el valor promedio de f en $[a,b]$ es $\frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$.
   (b) Muestra que existe un número $c \in [a,b]$ tal que $c^2 = \frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$.

9. Sea $f(x) = |2x+1|$, encuentra todos los reales c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para f en $[-1,0]$.

10. Sea $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ continua, tal que $\int_1^3 f(x)\,dx = 4$. Prueba que existe $c \in [1,3]$ tal que $f(c) = 2$.

11. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas, tales que $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = 0$. Prueba que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

12. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable no negativa. Demuestra que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Sugerencia: para el caso $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, encuentra cotas inferior y superior para el cociente $\int_a^b f(x)g(x)\,dx / \int_a^b g(x)\,dx$ y luego utiliza el TVI.