CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 1
Otoño 2022
Sumas de Riemann. La integral de Riemann

1. Escribe la integral de Riemann $\int_0^1 (1+x)^2\,dx$ como el límite de sumas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,(x_k - x_{k-1})$, en donde
$$P = \left\{0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right\},$$
$c_k = \dfrac{k}{n}$ y $f(x) = (1+x)^2$.

2. Expresa el límite como una integral definida (no calcules la integral):
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left[\left(2+\frac{4(1)}{n}\right)^{1/2} + \left(2+\frac{4(2)}{n}\right)^{1/2} + \ldots + \left(2+\frac{4(n)}{n}\right)^{1/2}\right].$$

3. Evalúa la integral $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ como el límite de una suma de Riemann. Sugerencia: usa la partición de $[0,1]$ en donde
$$x_k = c_k = \frac{k^2}{n^2}$$
y, correspondientemente,
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

4. En cada inciso argumenta si en el intervalo dado la función es: (i) continua, (ii) acotada, (iii) integrable:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1,0) \\ 5, & x = 0 \\ -2, & x \in (0,1] \end{cases}$ en $[-1,1]$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ en $[-10\pi, 10\pi]$.

   (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ en $[0,1]$.