

**Examen Final Departamental. Cálculo Diferencial e Integral III.**  
**Primavera 2022**

NOMBRE : \_\_\_\_\_ CU : \_\_\_\_\_

- i) No se permite el uso de calculadoras.  
ii) Cada pregunta vale lo mismo (1/8 cada una).  
**Duración: 2 horas 40 minutos**

1. Encuentra el valor de  $\iint_D \frac{1}{e^{x^2+y^2}} dx dy$ , donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \leq 0\}.$$

2. El rectángulo  $D^* = [0, 2] \times [0, 3]$  en el espacio  $uv$  es transformado por  $\mathbf{T}(u, v) = (2u - 3v, 4u + 5v)$  en una región  $D$  en el espacio  $xy$ , es decir  $T(D^*) = D$ . Calcula el área de  $D$ .

3. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x^2 u^3 - uy + v^3 - 2xv &= 6 \\xu^2 - yv &= 2.\end{aligned}$$

Demuestra que este sistema define a  $u$  y a  $v$  como funciones diferenciables en términos de  $x$  y  $y$ , para todo  $(x, y)$  en algún abierto que contiene a  $(1, -1)$ , sabiendo que  $u(1, -1) = 2$  y  $v(1, -1) = -2$ .

4. Sea  $D$  la región en el plano  $xy$  encerrada por el triángulo con vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(2, 0)$ . Encuentra el valor de  $\iint_D x dx dy$ .

5. Calcula el valor de  $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3} dx dy$ . (*Sugerencia:* Cambia el orden de integración)

6. Usa los multiplicadores de Lagrange para calcular los extremos de  $f(x, y, z) = 3y + 2z - x$  sujeto a  $y^2 + z^2 = 2$ ,  $2y - x = 1$ .

7. Encuentra el valor de  $h > 0$  tal que  $\iiint_D z(x^2 + y^2) dx dy dz = 10$ , donde

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, z \in [0, h]\}.$$

8. Considera la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x - y^2$ . Cierta curva de nivel de  $f$  en el plano  $xy$  intersecta a la recta  $x - y = 3$  en dos puntos, uno de los cuales es  $(2, -1)$ . Encuentra el otro punto.