

**ITAM, Departamento Académico de Matemáticas**  
**Examen final, junio de 2022**  
**Álgebra Superior 2/Matemáticas Discretas**

1. Encuentra un número complejo  $z = a + bi$  que satisfaga la siguiente igualdad:

$$(1 + i)z = \frac{2z - i}{2 - i}$$

2. Sea  $z \in \mathbb{C}$ . Demuestra que si  $z^2 + \bar{z}^2 = 0$  entonces  $|\operatorname{Re}(z)| = |\operatorname{Im}(z)|$ .
3. Sea  $K$  un campo y sean  $p(x)$ ,  $q(x)$  y  $r(x)$  polinomios en  $K[x]$ , todos distintos del polinomio cero. Demuestra que si  $p(x)$  divide al producto  $q(x)r(x)$  y los polinomios  $p(x)$  y  $q(x)$  son primos relativos, entonces  $p(x)$  divide a  $r(x)$ .  
(Nota: recuerda que dos polinomios son primos relativos si su máximo común divisor mónico es el polinomio 1.)
4. En un grupo hay 7 mujeres y 9 hombres. Se quiere formar una comisión de 5 personas de manera que haya, **al menos**, 1 hombre y 1 mujer. ¿De cuántas maneras se puede formar la comisión?
5. Determine cuántos números enteros entre 1 y 630 (ambos incluidos) no son divisibles ni por 3, ni por 5, ni por 7.
6. Considera el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 47, 48\}$ . Demuestra que cualquier subconjunto de  $A$  de tamaño 25 contiene un par de números cuya suma es 49.
7. En una cumbre de **10 países** (cuyos nombres son A, B, C, D, E, F, G, H, I, J) se establecieron **27 pactos bilaterales de defensa mutua**. Por ejemplo, el país D que pactó con todos, tiene ahora 9 defensores y también se compromete a defender a cada uno de ellos (por lo que el pacto que D tiene con A puede llamarse indistintamente pacto DA o pacto AD). La información de cuántos defensores obtuvo cada país tras esta cumbre se presenta en la siguiente tabla:

PAIS	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
DEFENSORES	5	5	8	9	2	?	3	4	5	5

Determine **cuántos defensores obtuvo el país F.**