

ITAM, Departamento Académico de Matemáticas
Examen final, junio de 2022
Álgebra Superior 2/Matemáticas Discretas

1. Encuentra un número complejo $z = a + bi$ que satisfaga la siguiente igualdad:

$$(1 + i)z = \frac{2z - i}{2 - i}$$

2. Sea $z \in \mathbb{C}$. Demuestra que si $z^2 + \bar{z}^2 = 0$ entonces $|\operatorname{Re}(z)| = |\operatorname{Im}(z)|$.
3. Sea K un campo y sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ polinomios en $K[x]$, todos distintos del polinomio cero. Demuestra que si $p(x)$ divide al producto $q(x)r(x)$ y los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son primos relativos, entonces $p(x)$ divide a $r(x)$.
(Nota: recuerda que dos polinomios son primos relativos si su máximo común divisor mónico es el polinomio 1.)
4. En un grupo hay 7 mujeres y 9 hombres. Se quiere formar una comisión de 5 personas de manera que haya, **al menos**, 1 hombre y 1 mujer. ¿De cuántas maneras se puede formar la comisión?
5. Determine cuántos números enteros entre 1 y 630 (ambos incluidos) no son divisibles ni por 3, ni por 5, ni por 7.
6. Considera el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 47, 48\}$. Demuestra que cualquier subconjunto de A de tamaño 25 contiene un par de números cuya suma es 49.
7. En una cumbre de **10 países** (cuyos nombres son A, B, C, D, E, F, G, H, I, J) se establecieron **27 pactos bilaterales de defensa mutua**. Por ejemplo, el país D que pactó con todos, tiene ahora 9 defensores y también se compromete a defender a cada uno de ellos (por lo que el pacto que D tiene con A puede llamarse indistintamente pacto DA o pacto AD). La información de cuántos defensores obtuvo cada país tras esta cumbre se presenta en la siguiente tabla:

PAIS	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
DEFENSORES	5	5	8	9	2	?	3	4	5	5

Determine **cuántos defensores obtuvo el país F.**