

**ITAM, Departamento Académico de Matemáticas**  
**Examen final, diciembre de 2020**  
**Álgebra Superior 2/Matemáticas Discretas**

i) De los siguientes cuatro incisos contesta uno y señala explícitamente cuál quieres que te califique:

- 1) Demuestra que  $w = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ , satisface la ecuación  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ .
- 2) Determina los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales

$$\frac{a + 2i}{3 + bi} = 1 - i$$

- 3) Encuentra las raíces cuartas de  $z = -8 + 8\sqrt{3}i$
- 4) Sean  $z_1$  y  $z_2$  dos soluciones de la ecuación  $z^2 + az + b = 0$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Prueba que  $z_1^n + z_2^n$  es un número real para todo  $n$  natural.  
Para el caso particular de  $a = -2$  y  $b = 2$  expresa la suma en función de  $n$ .

ii) Resuelve uno de los siguientes cuatro incisos. Señala explícitamente cuál quieres que califique:

- 1) Calcula el máximo común divisor de estos dos polinomios y escríbelo como combinación lineal de ellos:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 \quad \text{y} \quad g(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12$$

- 2) Sea  $K$  un campo y  $f(x) \in K[x]$ . Probar que existe  $g(x) \in K[x]$  con  $\operatorname{grado}(g(x)) = 1$  que cumple que  $f(x) = g(x)h(x)$  para algún  $h(x) \in K[x]$  si y solo si  $f(x)$  tiene una raíz en  $K$ .
- 3) Prueba que el polinomio  $f(x) = -x^3 - 6x^2 - 9x + 7$  es irreducible en  $\mathbb{Q}[x]$ .
- 4) Compruebe que  $p(x) = x^7 + x^3 + 1$ , como polinomio en  $\mathbb{R}[x]$ , no tiene raíces de multiplicidad mayor a 1.

iii) Resuelve uno de los siguientes cuatro incisos explicando claramente los principios y conceptos de combinatoria que usas. Señala explícitamente cuál quieres que califique:

- 1) En un motor de seis cilindros los cilindros pares están a la izquierda y los impares a la derecha. Un buen orden de explosiones es una permutación de los números del 1 al 6 en la que se alternen los lados del motor.
  - a) ¿Cuántos buenos órdenes para explosiones hay?
  - b) Haga lo mismo para un motor con  $2n$  cilindros.
- 2) Usando todas las letras de la palabra **PARANGARICUTIRIMICUARO** encuentra el número de palabras de longitud 22 que se pueden formar
  - a) si no hay restricciones,

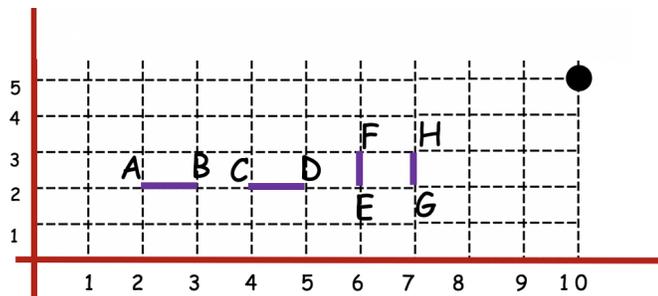
b) si las vocales van juntas.

- 3) En un grupo de 6 mujeres y 4 hombres se va a formar un equipo de 4 personas en el que deberá de haber, por lo menos, una mujer. ¿De cuántas maneras se puede formar el equipo?
- 4) Prueba que todo número natural mayor que 1 tiene un múltiplo formado por los dígitos 4 y 0.

IV) Resuelve uno de los siguientes cuatro incisos explicando claramente los principios y conceptos de combinatoria que usas.

- 1) ¿Cuántas trayectorias (de escalera) haciendo movimientos solamente hacia arriba o hacia la derecha podemos armar del punto  $(0, 0)$  al punto  $(10, 5)$ , SIN pasar por los segmentos  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ , y  $GH$ ?

Las coordenadas de los puntos son  $A = (2, 2)$ ,  $B = (3, 2)$ ,  $C = (4, 2)$ ,  $D = (5, 2)$ ,  $E = (6, 2)$ ,  $F = (6, 3)$ ,  $G = (7, 2)$ , y  $H = (7, 3)$ .



- 2) Encuentra el número de enteros positivos no mayores a 300 tales que sean impares o cuadrados perfectos pero no ambos.
- 3) Encuentra el número de soluciones de la ecuación diofantina  $x_1 + x_2 + x_3 = 21$  que cumplan que

$$1 \leq x_1 \leq 6,$$

$$4 \leq x_2 \leq 10,$$

$$0 \leq x_3 \leq 9.$$

- 4) Dos profesores de dos materias distintas van a hacer un examen oral a 6 estudiantes a la misma hora. Cada prueba individual durará 10 minutos. ¿De cuántas maneras distintas se puede planear el orden en que los estudiantes presentarán el examen, de modo que ninguno tenga que ver a los dos profesores al mismo tiempo?

v) De los siguientes cuatro incisos contesta solo uno y señala cuál.

- 1) Consideremos un juego completo de dominó compuesto por 28 fichas que son todos los pares de combinaciones posibles entre los elementos  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . El juego consiste en concatenar las fichas por un lado común.
  - a) Tomando como vértices los elementos  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , ¿qué representa una ficha?, ¿cuáles son las fichas que se corresponden con los lazos? Identificar la gráfica que se obtiene con todas las fichas, sin dibujarla.

- b) Usando la gráfica obtenido en el apartado anterior, demostrar que se puede concatenar las 21 fichas que no son dobles (sin dibujarla). ¿Se pueden concatenar todas las fichas?
- 2) Encuentra una gráfica  $G$  tal que  $G$  sea un árbol, tenga 15 aristas y tenga 5 hojas.
- 3) Sea  $H$  una subgráfica de  $G$ .
- a) Si el conjunto de vértices de  $H$  es igual al conjunto de vértices de  $G$ , ¿será cierto que entonces  $H = G$ ? Justifica tu respuesta.
- b) Si el conjunto de aristas de  $H$  es igual al conjunto de aristas de  $G$ , ¿será cierto que entonces  $H = G$ ? Justifica tu respuesta.
- 4) Sea  $G$  una gráfica simple con  $n$  vértices y  $m$  aristas, cuyos vértices tienen grado  $k$  o  $k + 1$ . Demuestra que si  $G$  tiene  $n_k$  vértices de grado  $k$  entonces  $n_k = (k + 1)n - 2m$ .