

ITAM, Departamento Académico de Matemáticas
Examen final, mayo de 2021
Álgebra Superior 2/Matemáticas Discretas

1. Calcula la parte real e imaginaria de $(\frac{1}{i} + \frac{3}{1+i})^2$ y, además, encuentra y dibuja las raíces cúbicas de -8 .
2. De los siguientes incisos contesta uno y señala explícitamente cuál quieres que te califique:
 - a) Demuestra que no existe $z \in \mathbb{C}$ que cumpla que $\bar{z} = i(z - 1)$.
 - b) Sean $a(x), b(x), c(x) \in K[x]$, con K un campo. Demuestra que si $a(x)$ y $b(x)$ son primos relativos y $a(x) \mid b(x)c(x)$, entonces $a(x) \mid c(x)$.
3. Demuestra uno de los siguientes incisos. Señala explícitamente cuál quieres que califique:
 - a) Usando el algoritmo de Euclides, encuentra el máximo común divisor de $p(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 1$ y $q(x) = x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Q}[x]$.
 - b) Escribe el polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + x - 3$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$.
4. Resuelve uno de los siguientes incisos explicando claramente los principios y conceptos de combinatoria que usas. Señala explícitamente cuál quieres que califique:
 - a) ¿Cuántas palabras se pueden obtener reordenando las letras de CRISANTEMO de forma que comiencen con C y terminen con O?
 - b) Demuestra que si escoges cualesquiera 6 números distintos del conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

siempre hay al menos dos de ellos que suman 11.

- c) Contesta los siguientes tres puntos. En un grupo de 5 mujeres y 6 hombres se va a formar un equipo de 4 personas en el que no importa el orden.
 - De cuántas maneras se puede formar si debe haber 2 hombres y 2 mujeres.
 - De cuántas maneras se puede formar si debe haber 3 hombres y 1 mujer.
 - De cuántas maneras se puede formar si debe haber 4 mujeres.

5. Resuelve uno de los siguientes incisos explicando claramente los principios y conceptos de combinatoria que usas.
- a) El estacionamiento te cuesta 75 pesos y lo vas a pagar con tres monedas iguales de 10 pesos, dos monedas iguales de 20 pesos y cinco monedas iguales de 1 peso. ¿Cuántos órdenes posibles tienes para introducir el dinero en la máquina?
 - b) En una pastelería hay tres pasteles idénticos de chocolate, cuatro pasteles idénticos milhojas, y cinco pasteles idénticos de frutas. ¿De cuántas maneras distintas se pueden acomodar los pasteles en línea en el escaparate de la pastelería?
 - c) Le vas a repartir 12 dulces idénticos a 3 niños. ¿Cuántas maneras distintas hay de hacer la repartición si la única restricción es que a ningún niño le tocan más de 5 dulces?
 - d) En una escuela de idiomas hay 3000 alumnos. Un total de 1232 estudiantes tomaron un curso de inglés, 879 tomaron un curso de francés, y 114 tomaron un curso de ruso. Además, 103 tomaron cursos de inglés y de francés, 23 tomaron cursos de inglés y de ruso, y 14 tomaron cursos de francés y de ruso. Además, 7 tomaron inglés, francés y ruso. ¿Cuántos estudiantes no tomaron ni inglés, ni francés, ni ruso?