ITAM, Departamento Académico de Matemáticas
Examen final, junio de 2022

Álgebra Superior 1/Pensamiento Matemático

1. En cada uno de los siguientes casos, determina si las proposiciones dadas son lógicamente equivalentes o no.

   (1) $$P \implies (Q \vee R) \qquad \text{y} \qquad (P \wedge \neg Q) \implies R.$$

   (2) $$(P \implies Q) \qquad \text{y} \qquad P \vee \neg Q$$

2. Sean A, B y C conjuntos. Demuestra que
$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$
   (Nota: el símbolo $\setminus$ es lo mismo que el símbolo $-$, ambos denotan la diferencia de conjuntos.)

3. Considera los siguientes intervalos de números reales: $A = (-7, 1]$, $B = [-2, 4]$ y $C = [3, 9)$. Encuentra $(A \cap B)^C \cup C$.

4. Prueba por inducción que para $n \geq 1$ se tiene que
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

5. Prueba por inducción que para $n \geq 2$ se tiene que $1 + 2^n < 3^n$.

6. Sea $X = \mathbb{R}$. Decimos que xRy si y sólo si $|y - x| \leq 2$. Determina si R es una relación de equivalencia y si lo es encuentra las clases de equivalencia de 0 y de π.

7. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$. Sea $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ la función dada por
$$F(X) = X \cap B, \qquad \text{para todo } X \subseteq A.$$
   Determina si F es inyectiva y si F es suprayectiva.

   (Nota: recuerda que $\mathcal{P}(C)$ es el conjunto potencia de C.)

8. Sea $f : X \to Y$ una función. Demuestra que para todo $A, B \subseteq X$, si $A \subseteq B$ entonces $f(A) \subseteq f(B)$.

   (Nota: recuerda que $f(C)$ es la imagen directa de C bajo f.)

9. Usando el algoritmo de Euclides, encuentra el máximo común divisor de $a = 1191$ y $b = 831$. Exprésalo como combinación lineal de a y b.

10. Sean a, b y c enteros no cero. Si $(a, 3) = 1$, $a|b$ y $a|(b + 3c)$ demuestra que $a|c$.

    (Nota: recuerda que (p, q) denota el máximo común divisor de p y q.)