CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 15
Primavera 2022
Series numéricas y criterios de convergencia. Convergencia absoluta y convergencia condicional. Series de Taylor

1. En cada inciso, encuentra el valor de la serie o justifica si ésta diverge:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{2n-1}}.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n-1}}{2^{n+2}}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_0 e^{-nbt_0}\,, \;\; c_0, b, t_0 > 0.$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} + 3^{n+1}}{6^n}.$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right).$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$ Sugerencia: usa fracciones parciales.

2. Estudia la convergencia de las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^{1/n}.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3!\; n!\; 3^n}.$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n}{n!}.$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.$

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

3. Analiza si las siguientes series convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3+n}{5+n}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$.

4. Considera la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+a)^{n+1}}$, con $a > 0$. Determina a de modo que el radio de convergencia de la serie sea igual 3.

5. En cada inciso, obtén la serie de Taylor generada por $f(x)$ en x_0:

(a) $f(x) = e^{2x}, \ x_0 = -1$.

(b) $f(x) = \cosh(x), \ x_0 = 0$.

(c) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t)dt, \ x_0 = 0$.

6. La serie de Taylor generada por $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. A partir de esta información:

   (a) Calcula $1 + \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} + \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \dfrac{(\ln 2)^4}{4!} + \ldots$

   (b) Encuentra la serie de Taylor generada por $g(x) = e^{-2x^2}$ en $x_0 = 0$.

   (c) Demuestra que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = 1$, con $\lambda > 0$ una constante.

   (d) Encuentra el valor exacto de $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n! + e^n}{n!\, e^n}$. Simplifica la respuesta.

7. La serie de Taylor generada por $f(x) = \ln(1+x)$ en $x_0 = 0$ es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. A partir de esta información:

   (a) Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = x \ln(1 + x^2)$ en $x_0 = 0$.

   (b) Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en $x_0 = 0$.

8. Demuestra que e^x es igual a su serie de Taylor en $x_0 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Sugerencia: Utiliza la fórmula de Taylor y demuestra que el residuo tiende a 0 cuando $n \to \infty$.