CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 14
Primavera 2022
Sucesiones de números reales

1. Calcula el límite de cada sucesión $\{a_n\}$ o justifica si ésta diverge:

   (a) $a_n = \dfrac{\tan^{-1}\left(n^2\right)}{\ln(1+n)}$.

   (b) $a_n = \dfrac{(n+1)\,(n+2)}{2n^2}$.

   (c) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$.

   (d) $a_n = \left[n - \ln\left(3e^n + 1\right)\right]$.

   (e) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

   (f) $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n$.

   (g) $a_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$.

   (h) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$.

   (i) $a_n = (\ln n)^{1/n}$. Sugerencia: $1 \leq \ln n \leq n$, para $n \geq 3$.

2. Demuestra que:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\alpha^n\right)^{1/n} = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ \alpha & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b), \quad a, b > 0.$

3. Considera la sucesión $I_n = \displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{n}{x} - \frac{n^2}{1+nx}\right) dx$.

   (a) Demuestra, justificando con detalle, que
   $$I_n = n \ln\left(\frac{1+n}{n}\right).$$

   (b) Calcula $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$.