

## Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2022

### Laboratorio 12: Integrales dobles, Teorema de Fubini, Integrales dobles iteradas

1. Calcular el valor de las integrales dobles y dibujar en el plano  $xy$  el dominio de integración:

(a)  $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx.$

(b)  $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos(x)} y \sin(x) dy dx.$

(c)  $\int_0^1 \int_{y^2}^y (x + y^2) dx dy.$

(d)  $\int_0^1 \int_{-2}^2 \frac{y}{1+x^2} dx dy.$

2. Calcular  $\iint_D (x - y) dx dy$ , donde  $D$  es el triángulo con vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$ .

3. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Muestra que  $2 \int_a^b \int_x^b f(x)f(y) dy dx = \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2$

Sugerencia: Muestra primero que  $\left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 = \iint_D f(x)f(y) dx dy$ , donde  $D = [a, b] \times [a, b]$ .

4. Calcular  $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx dy$ . Sugerencia: Cambiar el orden de integración.

5. Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas tales que  $g(x) \leq f(x)$  para toda  $x \in [a, b]$ . Sea  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ . Muestra que  $\iint_D 1 dx dy = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ . (Notar que en Cálculo Integral de una variable, la última integral es la definición del área de  $D$ ).

6. Sea  $D$  la región en el plano  $xy$  encerrada por las curvas  $x = 3y^2$  y  $x = 1 - y^2$ . Encuentra el valor de  $\iint_D (x + 2y) dx dy$ .

7. (Tomado del examen de muestra GRE de Matemáticas) ¿Cuál es el volumen del sólido en el espacio  $xyz$  acotado por las superficies  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x^2$ ,  $z = 0$  y  $z = y + 3$ ?

A)  $8/3$     B)  $16/3$     C)  $32/3$     D)  $104/105$     E)  $208/105$