CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 10
Primavera 2022
Integración por partes. Integrales trigonométricas. Sustitución trigonométrica

1. Determina las siguientes integrales:
   (a) $\displaystyle\int_0^a \frac{t}{e^{t/a}}dt,\ \ a>0.$
   (b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}dx.$
   (c) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx.$
   (d) $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{5x+3}\right)\ dx.$
   (e) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1}(3x)\, dx.$
   (f) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx.$
   (g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\, dx.$
2. Demuestra las siguientes fórmulas de reducción de grado:
   (a) $\displaystyle\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\, dx,\ \ a\neq 0,\ \ n=0,1,2,\ldots$
   (b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n(x)\, dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\, dx,\ n = 1,2,3,\ldots$
3. Demuestra que $\displaystyle\int_a^b \left(\int_x^b f(t)dt\right) dx = \int_a^b (x-a)\, f(x)dx.$
4. (a) Demuestra que
   $$\int f^{-1}(x)\, dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)dy,\quad \text{con } y = f^{-1}(x)\,.$$
   (b) Utilizando el inciso anterior, determina: (i) $\int \cos^{-\mathbf{1}}(x)dx$, (ii) $\int \log_2(x)dx$.
5. Encuentra las siguientes integrales trigonométricas:
   (a) $\int \cos^2\left(\sqrt{y}\right)\ dy.$
   (b) $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\ dx.$
   (c) $\int \operatorname{senh}^3(x)\cosh^2(x)\ dx.$

(d) $\int \tan^5(x)\,\sec^4(x)\,dx$.

(e) $\int \tan^3(x)\,\sec^5(x)\,dx$.

(f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}\,dx$

(g) $\int \csc^3(x)\,dx$.

(h) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3(x)\,dx$.

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}\,dx$.

6. Demuestra que para $m, n \in \mathbb{N}$:

(a) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = 0$.

(b) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \pi, & \text{si } n = m. \end{cases}$

7. Usando una sustitución trigonométrica determina las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{21+4x-x^2}}\,dx$.

(b) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}^{-1}(x)\,dx$.

(c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

(d) $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$.

(e) $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\,dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}$.

(f) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^4+2x^2+1}\,dx$.

8. Demuestra que

$$\int \sqrt{a-bx^2}dx = \frac{x\sqrt{a-bx^2}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right) + C, \quad 0 < b < a.$$

9. Usando la sustitución $u = \sec(x)$ demuestra que

$$\int \sec(x)dx = \ln|\sec(x)+\tan(x)| + C.$$