CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 9
Primavera 2022
Formas indeterminadas

1. Sin utilizar la regla de L'Hopital prueba que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}(x)}{x}=1 \quad \text{(cambia variable)}.$$

2. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y sea
$$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, & \text{si} \quad x\neq 0,\\ f(0), & \text{si} \quad x=0.\end{cases}$$
   (a) Demuestra que F es continua en el punto $x=0$.
   (b) ¿En qué condiciones se puede garantizar que F es diferenciable en el punto $x=0$?

3. Calcula, si existen, los siguientes límites:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)}$.
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+x^2/2}{x^3}$.
   (c) $\displaystyle\lim_{a\to 1}\frac{x^{1-a}-1}{1-a}$, $\quad x>0$.
   (d) $\displaystyle\lim_{\theta\to \pi/2}\frac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)}$.
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{(-1/x^2)}}{x}$.
   (f) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{2^x+4^x}{5^x-2^x}$.
   (g) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)$.
   (h) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left[\ln(1+6x)-\ln(4+3x)\right]$.
   (i) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(2\sqrt{x}\left[\pi-2\tan^{-1}(\sqrt{x})\right]\right)$.
   (j) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(x-\ln(3e^x+1)\right)$.
   (k) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x$, $\quad a>0, b>0$.
   (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\operatorname{sen}(x)\right)^{\cot(x)}$.

4. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$. Demuestra que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\int_0^{1/x} f(t)dt\right)^x = e^{f(0)}.$$

5. Sea $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=xe^{1/x}$.

   (a) Determina $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

   (b) Determina los intervalos de monotonía, extremos, concavidades y puntos de inflexión de f.

   (c) Dibuja la gráfica de f.