CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 7
Primavera 2022
Ejercicios de repaso

1. Encuentra el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(1 - 3\log_2 x)}$.

2. Simplifica $\cosh\big(\operatorname{senh}^{-1}(x)\big)$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Sea $g(x) = \displaystyle\int_0^{2\ln x} \ln(e^t + e^{-t})\, dt, \;\; x \geq 1$.

   (a) Sin resolver la integral, demuestra que $g(1/x) = -g(x)$.

   (b) Justifica que g es diferenciable en su dominio, y determina $g'(x)$.

4. Determina la derivada que se indica en cada inciso:

   (a) y', si $y = \left(4^{1/x} + 1\right)^x$, $x > 0$.

   (b) y', si $y = \dfrac{2^{\log_7 3}(\ln x)^x}{x^{1/x}\sqrt{1 + 3^x}}, \;\; x > 1$.

   (c) y'', si $y = \int_1^{x^2} t^t\, dt, \quad x > 0$.

   (d) y', si $\ln(y/x) = e^{x+y}$.

   (e) y', si $y = \int_0^{3x} e^{t^2 - 9x^2}\, dt$. Simplifica el resultado.

5. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{e^{1+\ln x}}{\sqrt{1 + x^2}} dx$.

   (b) $\int_0^{\ln(3)} \sqrt{1 + \cosh(2x)}\, dx$. Simplifica la respuesta.

   (c) $\displaystyle\int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 8x - 5}}$.

   (d) $\displaystyle\int \frac{x - \operatorname{senh}^{-1}(2x)}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx$.

6. Usando la sustitución $x = \cosh(u)$, demuestra que para $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^{\cosh(t)} x^2\sqrt{x^2 - 1}\, dx = \frac{1}{32}\operatorname{senh}(4t) - \frac{t}{8}.$$

7. Sea $f(x) = \log_{1/2}(x) - 4x + 1, \;\; x \in (0, \infty)\,.$

   (a) Justifica que f es invertible en su dominio.

   (b) Si g denota la función inversa de f, encuentra $g'(-3)$.

8. Considera la función definida por

$$f(x) = 1 + \cosh^{-1}\left(3 - \ln\left(2x\right)\right).$$

   (a) Determina el dominio y la imagen de f.

   (b) Demuestra que f es monótona y por tanto posee una inversa.

   (c) Caracteriza la función inversa de f (dominio, imagen y regla de correspondencia).

9. Demuestra que $\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \displaystyle\int_0^2 e^{x^2-x}\,dx \leq 2e^2.$

10. Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Supón que $\int_0^1 f(x)\,dx \geq 1 + \int_0^1 g(x)\,dx$. Prueba que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) \geq 1 + g(c)$.