CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 5
Primavera 2022
Función exponencial natural. Logaritmos y exponenciales en otras bases

1. Resuelve la ecuación $3e^x + 2e^{-x} = 7$.

2. Determina la derivada y' en cada inciso:

   (a) $y = \dfrac{1}{e^{2x} \ln x}$.

   (b) $y = \int_1^{e^{(x^2)}} \ln^2\left(\sqrt{t}\right)\, dt$. Simplifica la respuesta.

   (c) $e^{xy} + y = 2$.

3. Sea $f(x) = 2e^{3x} + \int_0^x \sqrt{3 + 2t^4 + t^6}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}$.

   (a) Justifica que f es diferenciable.

   (b) Demuestra que f es creciente, y por tanto posee una inversa f^{-1}.

   (c) Encuentra $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

4. Determina la integral en cada inciso:

   (a) $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$.

   (b) $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0} \sqrt{e^x} dx$.

   (c) $\int_0^{\ln 2} \dfrac{1}{e^x + 1} dx$.

5. Encuentra el valor de a y la función $f(x)$ que satisfacen

$$a + \int_a^{x^2} \frac{f(t)}{t} dt = e^x + x^2 - e, \quad \text{con } x > 0.$$

6. (a) Obtén las coordenadas del máximo absoluto de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ en $(0, \infty)$.

   (b) Usando el inciso anterior, demuestra que $x^e \leq e^x$ para todo $x > 0$, y $x^e = e^x$ si y sólo si $x = e$.

7. En cada una de las siguientes expresiones despeja y:

   (a) $\log_3(1 - y) - \log_3(y) - x = 0, \quad 0 < y < 1$.

   (b) $\dfrac{5^y - 5^{-y}}{2} = 3$.

8. Encuentra el dominio y la derivada de la función en cada inciso:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(\log_2 x)}$.

   (b) $y = \log_3\left(\dfrac{3^x}{1-3^x}\right)$.

   (c) $y = (2^x+1)^{1/x}$.

   (d) $y = x^x\,(\ln x)^{\ln x}$.

   (e) $y = (\ln x)^x + 2^{1/x}$.

9. Sea $f(x) = \left(\dfrac{2^x+1}{2^x-1}\right)^x$, $x > 0$. Calcula $f'(1)$ y simplifica el resultado.

10. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$, si

$$f(x) = \int_3^{1+2^x} \frac{\log_2(t-1)}{t-1}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

11. Determina las siguientes integrales:

    (a) $\displaystyle\int e^x\,10^x\,dx$.

    (b) $\displaystyle\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(x)}{x}\,dx$. Simplifica la respuesta.

    (c) $\displaystyle\int_0^{\log_3 2} \frac{1}{1+3^x}\,dx$. Simplifica la respuesta.