**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II**

**Laboratorio 4**

Primavera 2022

Función logaritmo natural. Funciones inversas

1. A partir de la gráfica de $y = \ln x$ bosqueja la gráfica de las siguientes funciones, proporcionando el dominio de cada una de ellas:

   (a) $y = \ln(1/x)$.

   (b) $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

   (c) $y = \ln|x|$.

   (d) $y = |\ln x|$.

2. Proporciona el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:

   (a) $f(x) = (\ln x)\ln(\operatorname{sen} x)$.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} + \ln(1/x)$.

   (c) $f(x) = \ln\left(\sqrt{-\ln x}\right)$.

   (d) $f(x) = \ln^2\left(\dfrac{3x+2}{x^4}\right)$.

   (e) $f(x) = \int_0^x \ln(2-x)\left(\dfrac{1+t^4}{t^3+2}\right) dt$.

3. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$. (Observa que $\ln e = 1$.)

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 2x}$.

   (c) $\displaystyle\int \frac{1}{3 + x^{1/3}}\, dx$. Utiliza la sustitución $u = 3 + x^{1/3}$.

4. Utiliza derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{(x^2+1)^{5/2}\sqrt{2 + \operatorname{sen} x}}.$$

5. (a) Prueba que si $t \geq 1$, entonces $\dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, y de aquí obtén que

$$0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2, \quad \text{para toda } x \geq 1.$$

   (b) Concluye que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

6. Determina una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea par, con $f(0) = 0$ y tal que

$$\ln(1 + f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{1 + f(\sqrt{t})}\, dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

7. Sea $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

y

$$\lim_{t \to 0} \frac{L(1+t)}{t} = 1. \quad (*)$$

Prueba que $L(x) = \ln x$, para todo $x > 0$.

Sugerencia: Prueba que $L(1) = 0$ y usa (*) para demostrar que $L'(x) = 1/x$.

8. En cada inciso encuentra un intervalo en el que $f$ tenga una inversa (halla un intervalo en el que $f' > 0$ o $f' < 0$). No es necesario encontrar $f^{-1}$.

   (a) $f(t) = t^4 + 2t^2 + 1$.

   (b) $f(x) = \int_{x^2}^{x} \ln t\, dt, \ \ 0 < x < 1$.

9. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$.

   (a) Muestra que $f$ es diferenciable y creciente en $\mathbb{R}$.

   (b) Si $f^{-1}$ denota la inversa de $f$, calcula $\frac{d}{dx} f^{-1}(9)$. (Nota que $f(2) = 9$.)