CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 3
Primavera 2022
Teorema Fundamental del Cálculo (continuación). Integral por sustitución

1. Halla la derivada de la función en cada inciso (sin integrar):

   (a) $G(x) = \int\limits_{-2x}^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (b) $G(t) = \int\limits_{t^2}^{t^4} \dfrac{t^2}{1+\sqrt{x}}\, dx.$

2. Para $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ define

$$S(\theta) = \int\limits_{0}^{\operatorname{sen}\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

   Usa la regla de Leibniz para probar que $S'(\theta) = 1$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Concluye que $S(\theta) = \theta$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

3. Calcula $f(2)$, si f es continua y satisface la fórmula dada para todo $x \geq 0$:

$$\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x).$$

4. Calcula las siguientes integrales definidas:

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(x - \frac{5}{x^3}\right) dx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec x \, \tan x \, dx.$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^5 x\right) dx.$

5. Determina las siguientes integrales indefinidas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\tan x)^5 \cos^2 x}.$

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}.$

   (c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}} dx.$ Sugerencia: $\displaystyle\sqrt{\frac{x-1}{x^5}} = \frac{1}{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\, dx.$

6. Calcula las siguientes integrales usando el método del cambio de variable para integrales definidas (haz una sustitución y cambia los límites de integración):

   (a) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} |\pi - 2x| \; dx.$

   (b) $\displaystyle\int_{-1/3}^{0} x\sqrt{1+3x} \; dx.$

7. Demuestra que si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y $\lambda \neq 0$ es una constante, entonces:

   (a) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x) \; dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x-\lambda) dx.$

   (b) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x) \; dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \; dx.$

8. Sea f continua en $[a, b]$. Demuestra que

$$\int_{a}^{b} f(x) \; dx = (b-a) \int_{0}^{1} f(a + (b-a)x) \; dx.$$

9. Sea f continua en $[-a, a]$. Demuestra que

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)] \, dx.$$

10. Sean g diferenciable en $\mathbb{R}$, f continua en $\mathbb{R}$ y

$$h(x) = x^2 \int_{g(x)}^{g(x^3)} f(t) dt.$$

   (a) Justifica que h es diferenciable y calcula su derivada.

   (b) Si f y g son impares, justifica si h es una función par, una función impar, o ninguna de éstas.