CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 2
Primavera 2022
Teorema del Valor Medio para Integrales. Teorema Fundamental del Cálculo

1. Sean $0 \leq a < b$ y $f(x) = x^2$.

    (a) Muestra que el valor promedio de f en $[a, b]$ es $\frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

    (b) Muestra que existe un número $c \in [a, b]$ tal que $c^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

2. Sea $f(x) = |2x + 1|$, encuentra todos los reales c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para f en $[-1, 0]$.

3. Sea $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ continua, tal que $\int_1^3 f(x)\, dx = 4$. Prueba que existe $c \in [1, 3]$ tal que $f(c) = 2$.

4. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas, tales que $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = 0$. Prueba que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

5. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable no negativa. Demuestra que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

    Sugerencia: para el caso $\int_a^b g(x)\, dx \neq 0$, encuentra cotas inferior y superior para el cociente $\int_a^b f(x)g(x)\, dx / \int_a^b g(x)\, dx$ y luego utiliza el TVI.

6. Halla la derivada de la función en cada inciso (sin integrar):

    (a) $G(x) = \int_x^1 \sqrt{1 + t^4}\, dt.$

    (b) $G(x) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^4}\, dt.$

    (c) $G(x) = \left(\int_0^x \sqrt{1 + s^4}\, ds\right)^2.$

    (d) $G(x) = \int_0^1 x^2\sqrt{1 + t^4}\, dt.$

    (e) $G(x) = \int_0^x x^2\sqrt{1 + t^4}\, dt.$

7. Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{x} x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ en $x = \frac{\pi}{2}$, para estimar el valor de $f(\frac{\pi}{2} + 0.1)$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$g(x) = (x+1) \int_{-1}^{x} f(t) \; dt.$$

   (a) Demuestra que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Justifica que g es diferenciable en $\mathbb{R}$ y entonces calcula $g'(x)$.

9. Sea f continua en $[a, b]$. Demuestra que existe $x \in [a, b]$ tal que

$$\int_{a}^{x} f(t) \, dt = \int_{x}^{b} f(t) \, dt.$$

   Sugerencia: Considera la función $g(x) = \int_a^x f(t) \, dt - \int_x^b f(t) \, dt$.