

Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2022

Laboratorio 2: Abiertos, cerrados, frontera, límites, continuidad

1. Demuestra que el conjunto de los números naturales es cerrado en \mathbb{R} y que el conjunto de números racionales no es ni abierto ni cerrado en \mathbb{R} .
2. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Demuestra que A es abierto en \mathbb{R}^2 justificando que si $\vec{X}_0 = (x_0, y_0)$ está en A , entonces la bola abierta $B_r(\vec{X}_0)$ está contenida en A , donde $r = \min\{x_0, y_0, 1 - x_0, 1 - y_0\}$.
3. Si U es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n , demuestra que la frontera de U está en el complemento de U .
4. Demuestra que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{3x^2 + y^6}$ no existe.
5. Usa el hecho de que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(t)}{t} = 1$ para demostrar (con una argumento $\epsilon - \delta$) que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(xy)}{xy} = 1$.
6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$. Demuestra que f es continua en $(0, 0)$.
7. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x^3}{x^2 + y^2}, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, y $\mathbf{F}(0, 0) = (0, 0)$. Demuestra que \mathbf{F} no es continua en $(0, 0)$.