

**Examen Final Departamental. Cálculo Diferencial e Integral III.
Otoño 2021**

NOMBRE: _____ **CU:** _____

- i) No se permite el uso de calculadoras.
ii) Cada pregunta vale lo mismo (1/7 cada una).
Duración: 2 horas 30 minutos

1. Sea D la región en \mathbb{R}^2 acotada por las curvas $x = 2 - 2y + y^2$ y $x = 2 + 2y - y^2$. Encuentra la integral doble

$$\iint_D x \, dx \, dy.$$

2. Probar que el sistema

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 - x^2 + 2 &= 0 \\ yz + xz - xy - 1 &= 0 \end{aligned}$$

define dos funciones implícitas $y = y(x)$, $z = z(x)$ para x en algún abierto que contiene a 2, y en algún abierto que contiene a 1, y z en algún abierto que contiene a 1.

3. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \leq 0, \quad y \leq 0\}$, determina el valor de $\iint_D (y - \cos(x^2 + y^2)) \, dx \, dy$.
4. Sea $a > 0$ y sea D_a la región en el plano xy acotada por la recta $y = 2ax$ y la parábola $y = ax^2$. Encuentra el valor de $a > 0$ tal que $\iint_{D_a} xy \, dx \, dy = a$.
5. Usa los Multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las condiciones $2y + 4z = 5$, $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$.
6. Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{F}(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$. Demuestra que \mathbf{F} es localmente invertible alrededor de cualquier punto en \mathbb{R}^2 , pero no es invertible en todo \mathbb{R}^2 .
7. Encuentra el valor de la integral

$$\iiint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^2} \, dx \, dy \, dz,$$

si $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\}$.