Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2021

Primer examen parcial departamental

Instrucciones:

i) Escribe tu NOMBRE y CU en la primera hoja de las respuestas.
ii) No se permite usar calculadoras.
iii) Cada pregunta vale lo mismo (1/7 cada una).
iv) Tendrás 10 minutos adicionales para preparar y enviar las respuestas a tu profesor, por lo que debes enviar las soluciones a más tardar a las 21:10.

Duración: 2 horas

1. Encuentra el punto de la superficie $z = 2x^2 + 3y^2$ en donde el plano tangente es paralelo al plano $8x - 3y - z = 0$. Escribe la ecuación de dicho plano tangente.

2. Usa la regla de la cadena para calcular $\mathrm{D}(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(-2, 1)$ con:
   $\mathbf{F}(u, v, w) = (v^2 + uw, u^2 + w^2, v - w^3)$ y $\mathbf{G}(x, y) = (xy^3, x^2 - y^2, 3x + 5y)$.

3. Determina si la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
   $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
   es continua en $(0, 0)$.

4. Dibuja las curvas de nivel de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 - 4x - y$ que pasan por los puntos $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$, respectivamente.

5. Considera una partícula que viaja en la trayectoria dada por la función $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por
   $$c(t) = (3\cos(t), 5\mathrm{sen}(t), t^2 - 2\pi t).$$
   Al tiempo $t = \pi$, la partícula se escapa por su tangente. Después de haberse escapado, ¿pasará en algún momento por el punto $(0, 1, 2)$?
   Justifica tu respuesta.

6. Sea $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = uv$, $y = u\cos(v)$, $z = u\mathrm{sen}(v)$. Usa la regla de la cadena para encontrar $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ cuando $u = 1$ y $v = 0$.
   Nota: no se tomarán en cuenta otros métodos.

7. Demuestra formalmente $(\epsilon - \delta)$ que la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ es continua en el origen.