

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

### Laboratorio 1

Primavera 2022

La integral definida. Propiedades de la integral definida.

1. Escribe la integral de Riemann  $\int_0^1 (1+x)^2 dx$  como el límite de sumas de

Riemann  $\sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ , en donde

$$P = \left\{ 0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1 \right\},$$

$$c_k = \frac{k}{n} \text{ y } f(x) = (1+x)^2.$$

2. Expresa el límite como una integral definida (no calcules la integral):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \left[ \left( 2 + \frac{4(1)}{n} \right)^{1/2} + \left( 2 + \frac{4(2)}{n} \right)^{1/2} + \dots + \left( 2 + \frac{4(n)}{n} \right)^{1/2} \right].$$

3. Evalúa la integral  $\int_0^1 \sqrt{x} dx$  como el límite de una suma de Riemann. Sugerencia: usa la partición de  $[0, 1]$  en donde

$$x_k = c_k = \frac{k^2}{n^2}$$

y, correspondientemente,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

4. En cada inciso argumenta si en el intervalo dado la función es: (i) continua, (ii) acotada, (iii) integrable:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0) \\ 5, & x = 0 \\ -2, & x \in (0, 1] \end{cases} \text{ en } [-1, 1].$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ en } [-10\pi, 10\pi].$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ en } [0, 1].$$

5. Calcula  $\int_{-1}^1 |2x + 1| dx$ .

6. Determina  $\int_{-2}^a |x| dx$ . Analiza los casos  $a \leq 0$  y  $a > 0$ .

7. Prueba que  $\frac{x^6}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^6$ , si  $x \in [0, 1]$ . Concluye que

$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \frac{1}{7}.$$

8. Demuestra que  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^4 x dx \geq \frac{\pi}{8}$ .

9. Demuestra que si  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Sugerencia:  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ .