Examen Final (Segundo período)
Cálculo Diferencial e Integral II
Departamento de Matemáticas, ITAM
4 de enero de 2022

Nombre: ________________________________ CU: ____________

1	**2**	**3(a)**	**3(b)**	**4**	**5**	**6(a)**	**6(b)**	**6(c)**	**Total**

Duración:
7:00 a 9:30 hrs

Lee cuidadosamente las instrucciones:

1. Contesta con claridad y limpieza.
2. Simplifica tus respuestas en la medida de lo posible.
3. Muestra el trabajo completo y detallado. Una respuesta sin justificación se considerará no contestada.

Aviso importante:

El profesor se reserva el derecho de llamar a consulta a todos los alumnos sospechosos de haber cometido fraude de cualquier tipo durante el examen, para aclarar que el alumno es responsable de todos sus procedimientos.

Cálculo Diferencial e Integral II
Examen Final (Segundo período)

1. (**1.25 ptos.**) Demuestra que

$$\int_a^b \left(\int_x^b e^{-t^2} dt \right) dx = \int_a^b (x-a)\, e^{-x^2} dx.$$

2. (**1.75 ptos.**) Utiliza el teorema de Taylor para demostrar que

$$\left| \cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) \right| \le \frac{1}{720}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

3. Considera la sucesión $I_n = \displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{n}{x} - \frac{n^2}{1+nx} \right) dx$, $n \ge 1$.

   (a) (**1.25 ptos.**) Demuestra, justificando con detalle, que

   $$I_n = n \ln\left(\frac{1+n}{n} \right).$$

   (b) (**0.5 ptos.**) Determina $\lim_{n\to\infty} I_n$.

4. (**1.25 ptos.**) Calcula el valor de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{(-2)^n + 1}{3^{n+1}}$.

5. (**1.5 ptos.**) Calcula el valor de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty [\arctan(n+1) - \arctan(n)]$.

6. **Contesta únicamente 2 de los siguientes incisos**. Si contestas todos, sólo se tomarán en cuenta los 2 que tengan la calificación más baja.

   (a) (**1.25 ptos.**) Estudia la naturaleza de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)}$.

   (b) (**1.25 ptos.**) Estudia la naturaleza de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty n \operatorname{sen}(1/n)$.

   (c) (**1.25 ptos.**) Estudia la naturaleza de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{(3n)!}{3^n n! n!}$.