Primer Examen Departamental

Cálculo Diferencial e Integral II

Departamento de Matemáticas, ITAM

1 de octubre de 2021

Duración:
19:00 a 21:15 hrs

Lee cuidadosamente las instrucciones:

1. Envía tus respuestas en formato pdf. En la primera hoja escribe tu nombre y C.U.
2. Presenta tus soluciones en el orden de numeración de las preguntas.
3. Contesta con claridad y limpieza.
4. Simplifica tus respuestas en la medida de lo posible.
5. Muestra el trabajo <u>completo y detallado</u>. Una respuesta sin justificación se considerará no contestada.
6. Tendrás 15 minutos adicionales para preparar y enviar las respuestas a tu profesor, por lo que debes enviar las soluciones a más tardar a las 21:30 hrs.

Aviso importante:

El profesor se reserva el derecho de llamar a consulta a todos los alumnos sospechosos de haber cometido fraude de cualquier tipo durante el examen, para aclarar que el alumno es responsable de todos sus procedimientos.

Cálculo Diferencial e Integral II
Primer Examen Departamental

1. Considera la función $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{\log_2 x}} \frac{2^{t^2}}{1+2^{t^2}}\, dt.$

   (a) Determina el intervalo $I \subseteq D$ en donde g es diferenciable. Justifica.

   (b) Demuestra que g posee una inversa g^{-1} en el intervalo I.

   (c) Encuentra $(g^{-1})'(0)$.

2. Encuentra los valores de $a \in \mathbb{R}^+$ tales que $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x(1+\ln^2(x))} = \frac{\pi}{3}.$

3. Encuentra $f'(e)$, si

$$f(x) = (\ln x)^x\,(1+\ln x)\,. \qquad \text{Simplifica el resultado.}$$

4. Usando la sustitución $x = 3\,\mathrm{senh}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, demuestra por integración que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+9} - 9\,\mathrm{senh}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right] + C.$$

5. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \displaystyle\int_0^{2x} (x^2+1)\, e^{t^2} dt.$

   (a) Determina si g es una función par, impar o ninguna de éstas.

   (b) Encuentra $g'(x)$.

6. Sea $f(x) = e^{(2-x)a}e^{xb}$, $a \neq b$. Demuestra que existe $c \in [0,2]$ tal que

$$f(c) = \frac{e^{2b} - e^{2a}}{2b - 2a}.$$

7. Demuestra que $\displaystyle\int_0^1 e^{x-x^2} dx \leq \sqrt[4]{e}.$

Cada pregunta tiene el siguiente valor:

1(a)	**1(b)**	**1(c)**	**2**	**3**	**4**	**5(a)**	**5(b)**	**6**	**7**
0.5	0.75	1.0	1.0	1.25	1.25	1.0	1.25	1.0	1.0