Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2021

Laboratorio 13 : Cambio de variables en integrales dobles

1. Sea D la región en el plano xy encerrada por el paralelogramo con vértices $(0,0)$, $(2,-1)$, $(3,4)$ y $(5,3)$. Encuentra el valor de $\iint_D (-x+3y)dxdy$ haciendo un cambio de variables tal que el dominio de integración sea el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(u,v) = (u^2 - 3v, uv + 2v^2)$. Suponer que D_1 y D_2 son dos regiones planas acotadas tales que $T(D_2) = D_1$ con T inyectiva en D_2. Reescribe $\iint_{D_1} ye^{x^2}dxdy$ como una integral de la forma $\iint_{D_2} g(u,v)dudv$, escribiendo explícitamente $g(u,v)$. Suponer que las regiones D_1 y D_2 son tales que ambas integrales están bien definidas.

3. Encuentra el valor de $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$, donde
$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ x \leq 0,\ x \leq y\}.$$

4. Sea D la región en el plano xy encerrada por un triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Muestra que en coordenadas polares D se puede escribir como
$$D = \left\{(r,\theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)}\right\}.$$

5. Demuestra que $\frac{1}{2}(1-\cos(1)) \leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+(xy)^4}dxdy \leq 1.$

6. Sea T_a la región en el plano xy encerrada por un triángulo con vértices $(0,0)$, $(a,0)$ y $(0,a)$ con $a>0$. Sea $D_a = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq a^2\}$. Encuentra el valor de
$$\lim_{a\to 0} \frac{\iint_{T_a}(x+1)^3(2y+3)^2dxdy}{\iint_{D_a} e^{x^2-y+1}dxdy}.$$