Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2021
Examen final departamental

Instrucciones:

i) Escribe tu NOMBRE y CU en la primera hoja de las respuestas.
ii) No se permite usar calculadoras.
iii) Cada pregunta vale lo mismo (1/8 cada una).
iv) Tendrás 10 minutos adicionales para preparar y enviar las respuestas a tu profesor, por lo que debes enviar las soluciones a más tardar a las 15:40.

Duración: 2 horas 30 minutos

1. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continua. Escribe $\displaystyle\int_0^2\left(\int_{-2x+4}^{-x^2+4} f(x,y)dy\right)dx$ como una integral de la forma $\displaystyle\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$.

2. Sea D_1 el rectángulo $[0,1]\times[0,1]$ y sea D_2 el triángulo en el plano xy con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, y $(0,1)$. Sea $\mathbf{T}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{T}(u,v)=(u(1-v),v)$ para todo $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Se cumple que $\mathbf{T}(D_1)=D_2$ y que $\mathbf{T}$ es inyectiva en D_1 excepto en la frontera de D_1. Escribe $\displaystyle\iint_{D_2}(x+y^2)dxdy$ como una integral de la forma $\displaystyle\iint_{D_1} g(u,v)dudv$.

3. Sea $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 4\le x^2+y^2\le 9,\quad y\le 0\}$. Encuentra el valor de $\displaystyle\iint_D(\sqrt{x^2+y^2}-y)dxdy$.

4. Sea D la región sólida en el espacio xyz acotada por las superficies $y=-x^2+2$, $y=x^2$, $z=x^2+2y$, y el plano $z=0$. Encuentra el volumen de D.

5. Sea D_R la semiesfera de radio R dada por $D_R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2\le R^2,\ \ z\ge 0\}$. Encuentra $R>0$ tal que $\displaystyle\iiint_{D_R} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz=1$.

6. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase C^1 y tal que $f(2)=3$. Dado el sistema de ecuaciones

$$f(x+y^2)-z^2+1 = 0 \tag{1}$$
$$f(z^2+2y)-xz-1 = 0, \tag{2}$$

encuentra las condiciones más generales en $f'(2)$ para las cuales el teorema de la función implícita garantiza que el sistema se puede resolver (no de forma explícita necesariamente) de manera única para las variables y y z en términos de x, con x en algún intervalo abierto que contiene a 1, y en algún abierto que contiene a -1, z en algún abierto que contiene a 2.

7. Sea $\mathbf{F}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{F}(x,y)=(x^2-xy,x^2+y)$.

(a) Dibuja en el plano xy el conjunto de puntos (x_0, y_0) para los cuales el teorema de la función inversa garantiza que $\mathbf{F}$ es inyectiva en algún abierto que contiene a (x_0, y_0).

(b) Sea U un abierto que contiene al punto $(-1, 2)$ tal que $\mathbf{F}$ es inyectiva en U. Sea $\mathbf{G}$ la inversa de $\mathbf{F}$ restringida a U. Notando que $\mathbf{F}(-1, 2) = (3, 3)$, calcula $\mathrm{D}\mathbf{G}(3, 3)$.

8. Usa los multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos de $f(x, y, z) = 2x + y + 2z$ sujeta a las restricciones $x^2 - y^2 = 1, \quad 2x + z = 1$.