Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2020

Examen Final

Instrucciones:

i) En la primer hoja de tus respuestas, escribe tu NOMBRE, CU, y el NOMBRE DEL ARCHIVO que recibiste.
ii) No se permite usar calculadoras.
iii) Cada pregunta vale lo mismo (1/9 cada una).
iv) El examen dura 2 horas 30 minutos. Tendrás 15 minutos adicionales para preparar y enviar las respuestas a tu profesor, por lo que debes enviar las soluciones a más tardar a las 15:45.

1. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0\}$. Encuentra el valor de $\displaystyle\iint_D (x + \frac{1}{1+x^2+y^2})dxdy$.

2. Sea $a > 0$, y sea D_a la región en el plano xy acotada por un triángulo con vértices $(0,0)$, $(a,0)$, y (a,a). Sea C_a el cuadrado $[0,a] \times [0,a]$. Encuentra el valor de a tal que $\displaystyle\iint_{D_a} (x+4y)dxdy = \iint_{C_a} (2x+y-1)dxdy$.

3. Sea D la región en el plano xy encerrada por el paralelogramo con vértices $(0,0)$, $(-2,-1)$, $(1,1)$ y $(-1,0)$. Haz un cambio de variables para escribir la integral $\displaystyle\iint_D \ln(1+|x|y^2)dxdy$ como una integral doble tal que el dominio de integración sea el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

4. Encuentra el volumen del sólido en el espacio xyz acotado por las superficies $y = -x^2$, $y = -x$, $z = 0$, $z = x^2 + 2y^2$.

5. Sea D el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$. Muestra que $\displaystyle\frac{1}{2}\ln(2) \leq \iint_D \frac{x}{1+x^2\cos(y)}dxdy \leq \frac{1}{2}$.
   Sugerencia: Justifica las desigualdes $1 \leq 1 + x^2\cos(y) \leq 1 + x^2$, para todo $(x,y) \in D$.

6. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -xy^2 + xzu + e^{u-v} &= 1 \\ u^3yz + 3xv - uv^2 &= 3, \end{aligned}$$

   (a) Muestra que en alguna vecindad del punto $(1,1,1,1,1)$, este sistema define u y v de manera implícita como funciones de las variables x, y, z.

   (b) Encuentra el valor de $\displaystyle\frac{\partial v}{\partial x}(1,1,1)$.

7. Sea γ la curva descrita por la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t^2-t, 2t+t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Encuentra un punto sobre γ tal que la recta tangente a γ en dicho punto sea paralela a la recta parametrizada por $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t-1, 2t+1)$, $t \in \mathbb{R}$.

8. Una curva en el plano xy está dada paramétricamente por $x = t^2 + 3t$, $y = e^{t-2} + t^2$ para toda $t > 0$. Encuentra el valor de $\displaystyle\frac{d^2y}{dx^2}$ en el punto $(10,5)$.

9. Usa los multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos de $f(x,y,z) = 3x+2y-z$ sujeta a las restricciones $x^2+y^2 = 2$, $2x - z = 1$