Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2020
Examen final departamental

Instrucciones:

i) Escribe tu NOMBRE y CU en la primera hoja de las respuestas.
ii) No se permite usar calculadoras.
iii) Cada pregunta vale lo mismo (1/8 cada una).
iv) Tendrás 10 minutos adicionales para preparar y enviar las respuestas a tu profesor, por lo que debes enviar las soluciones a más tardar a las 10:40.

Duración: 2 horas 30 minutos

1. Encuentra el valor de $\iiint_D (z+x^2+y^2)dxdydz$, donde $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ z \in [0,3]\}$.

2. Sea $a > 0$, y sea D_a la región en el plano xy acotada por un triángulo con vértices $(0,0)$, $(a,0)$, y $(a,2a)$. Encuentra el valor de a tal que $\iint_{D_a} (x+2y)dxdy = a^3 + \dfrac{1}{8}$.

3. ¿Cuál es el volumen del sólido en el espacio xyz acotado por el paraboloide $z = -x^2 - y^2 + 1$ y el plano $z = 0$?

4. Sea D la región en el plano xy encerrada por las curvas $y = x^2$, $y = 2x$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Escribe $\iint_D f(x,y)dxdy$ como una integral iterada de las siguientes formas:
   a) $\displaystyle\int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$, b) $\displaystyle\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$.

5. Sea D la región en el plano xy encerrada por el paralelogramo con vértices $(0,0)$, $(-1,2)$, $(3,1)$ y $(2,3)$. Encuentra el valor de $\iint_D (2x-y)dxdy$

6. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \leq 0, \quad y \leq 0\}$. Encuentra el valor de $\iint_D (y - e^{x^2+y^2})dxdy$.

7. Sea $\mathbf{F}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{F}(x,y) = (e^{x-1} + xy, y^3 + 2xy)$.
   (a) Muestra que $\mathbf{F}$ es invertible en algún abierto U que contiene al punto $(1,1)$.
   (b) Si $\mathbf{G}$ es la inversa de $\mathbf{F}$ restringida a U, y notando que $\mathbf{F}(1,1) = (2,3)$, calcula $\mathrm{D}\mathbf{G}(2,3)$.

8. Usa los multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos de $f(x,y,z) = x - y + 2z$ sujeta a las restricciones $x^2 + y^2 = 6, \quad -2x + z = 2$.