CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 8
Otoño 2021
Ejercicios de repaso

1. Demuestra que
$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x}\, dx \leq 2e^2.$$

2. Supón que $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas y que $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = 0$. Prueba que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

3. Sea $g(x) = \displaystyle\int_0^{2\ln x} \ln\left(e^t + e^{-t}\right) dt, \;\; x \geq 1.$

   (a) Sin resolver la integral, demuestra que $g(1/x) = -g(x)$.

   (b) Justifica que g es diferenciable en su dominio, y determina $g'(x)$.

4. Determina la derivada que se indica en cada inciso:

   (a) y', si $y = \dfrac{2^{\log_7 3} (\ln x)^x}{x^{1/x}\sqrt{1+3^x}}, \;\; x > 1.$

   (b) y', si $\ln(y/x) = e^{x+y}$.

   (c) $g'(\theta)$, si $g(\theta) = \displaystyle\int_{\tan\theta}^{0} \frac{e^{\tan^{-1} x}}{\sqrt{x^2+1}} dx, \;\; \theta \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right)$. Simplifica el resultado.

   (d) $g'(\theta)$, si $F(x) = \int_0^{3x} e^{t^2-9x^2} dt$. Simplifica el resultado.

5. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{e^{1+\ln x}}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

   (b) $\int_0^{\ln(3)} \sqrt{1+\cosh(2x)}\, dx$. Simplifica la respuesta.

   (c) $\displaystyle\int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x-5}}.$

   (d) $\displaystyle\int \frac{x - \arctan(2x)}{1+4x^2} dx.$

6. Simplifica $\cosh\left(\operatorname{senh}^{-1}(x)\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

7. Usando la sustitución $x = \cosh(u)$, demuestra que para $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^{\cosh(t)} x^2\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{32}\operatorname{senh}(4t) - \frac{t}{8}.$$

8. Encuentra los valores de $x > 0$ que satisfacen la ecuación

$$x^{2+\log_2 x} = 8.$$

9. Sea $f(x) = 2^{-x} - \displaystyle\int_0^{\operatorname{arcsen} x} \sqrt{1+\operatorname{sen}^6 t}\,dt,\;\; x \in [-1,1]$.

   (a) Justifica que f es invertible en el intervalo $(-1,1)$.

   (b) Sea g la función inversa de f. Demuestra que $g'(1) = -\dfrac{1}{\ln(2e)}$.

10. Considera la función definida por

$$f(x) = -\pi + \cos^{-1}(1-\ln x).$$

   (a) Determina: (i) el dominio de f, (ii) la imagen (rango) de f, (iii) los ceros de f, (iv) las soluciones de la ecuación $f(x) = -\pi$.

   (b) Demuestra que f es inyectiva.

   (c) Caracteriza la función inversa de f (dominio, imagen y regla de correspondencia).