

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 11

Otoño 2021

Integrales trigonométricas. Sustituciones trigonométricas

1. Encuentra las siguientes integrales:

(a) $\int \cos^2(\sqrt{y}) dy.$

(b) $\int \operatorname{sen}^2(x) \cos^2(x) dx.$

(c) $\int \operatorname{senh}^3(x) \cosh^2(x) dx.$

(d) $\int \tan^5(x) \sec^4(x) dx.$

(e) $\int \tan^3(x) \sec^5(x) dx.$

(f) $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)} dx$

(g) $\int \csc^3(x) dx.$

(h) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3(x) dx.$

(i) $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}} dx.$

2. Demuestra que para $m, n \in \mathbb{N}$:

(a) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx = 0.$

(b) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \pi, & \text{si } n = m. \end{cases}$

3. Usando una sustitución trigonométrica determina las siguientes integrales:

(a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{21 + 4x - x^2}} dx.$

(b) $\int x^2 \operatorname{sen}^{-1}(x) dx.$

(c) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2}{(1-x^2)^{3/2}} dx.$

(d) $\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx.$

(e) $\int_0^{\ln 4} \frac{e^t dt}{\sqrt{e^{2t} + 9}}.$

(f) $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx.$

4. Utiliza una sustitución trigonométrica para demostrar que

$$\int \sqrt{a-bx^2} dx = \frac{x\sqrt{a-bx^2}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} \operatorname{sen}^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right) + C, \quad 0 < b < a.$$

5. Usando la sustitución $u = \sec(x)$ demuestra que

$$\int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \tan(x)| + C.$$