

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 10

Otoño 2021

Integración por partes

1. Encuentra las siguientes integrales:

(a) $\int \frac{x 2^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx.$

(b) $\int_0^a \frac{t}{e^{t/a}} dt, \quad a > 0.$

(c) $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx.$

(d) $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$

(e) $\int \cos(\sqrt{5x+3}) dx.$

(f) $\int \operatorname{sen}^{-1}(3x) dx.$

(g) $\int \operatorname{sen}(\ln x) dx.$

(h) $\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx.$

2. Utilizando una integración por partes demuestra las siguientes fórmulas de reducción de grado:

(a)

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx, \quad a \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(b)

$$\int \operatorname{sen}^n(x) dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1}(x) \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2}(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(c)

$$\int (x^2 + a^2)^n dx = \frac{x(x^2 + a^2)^n}{1+2n} + \frac{2na^2}{1+2n} \int (x^2 + a^2)^{n-1} dx, \quad a \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3. Demuestra que

$$\int_a^b \left(\int_x^b f(t) dt \right) dx = \int_a^b (x-a) f(x) dx.$$

4. (a) Demuestra que

$$\int f(x) dx = xf(x) - \int xf'(x) dx.$$

(b) Si f y g son funciones inversas, y si f' es continua, demuestra que

$$\int_a^b f(x) dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy.$$

Sugerencia: usa 4a.

(c) Aplica el resultado del inciso anterior para evaluar

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \text{sen}^{-1}(x) dx.$$

5. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable, tal que

$$f''(x) = -\frac{3}{x^4} \cosh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^5} \text{senh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(1) = \cosh(1)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. Demuestra que

$$f(x) = -\frac{1}{x} \text{senh}\left(\frac{1}{x}\right) + \cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$