Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2021

Laboratorio 8 : Matrices definidas positivas, definidas negativas

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no necesariamente simétrica pero que satisface $\vec{x}^T A\vec{x} > 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Muestra que la matriz $B = \dfrac{A + A^T}{2}$ es simétrica definida positiva y además $\vec{x}^T B\vec{x} = \vec{x}^T A\vec{x}$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

2. Encuentra todos los valores de $c \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 1+c & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
es definida positiva.

3. Muestra que la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$
es definida negativa.

4. Muestra que la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$
no es definida negativa ni definida positiva.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^2 - x^2$. Encuentra todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para los cuales la matriz hessiana de f en (x, y), $H_f(x, y)$, es definida negativa.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{y^3}{6} - \dfrac{x^3}{6} - xy$.

i) De las 3 zonas sombreadas mostradas en la figura, indica cuál corresponde a los puntos (x, y) donde $H_f(x, y)$ es definida positiva, cuál corresponde a los puntos (x, y) donde $H_f(x, y)$ es definida negativa, y cuál corresponde a los puntos (x, y) donde $H_f(x, y)$ no es ni definida positiva ni definida negativa.

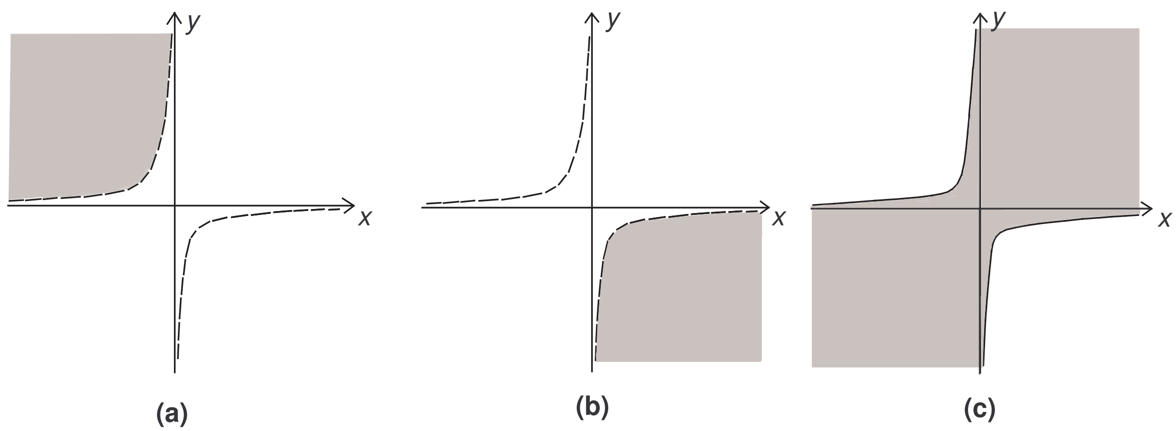

Figure 1: Las curvas punteadas y sólidas son la gráfica de $y = -1/x$.

ii) Dibuja la zona en el plano xy correspondiente a los puntos (x, y) tales que $H_f(x, y)$ nos es definida positiva ni definida negativa pero con $\det(H_f(x, y)) \neq 0$.