Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2021
Segundo examen parcial departamental.

Instrucciones:

i) Escribe tu NOMBRE y CU en la primera hoja de las respuestas.
ii) No se permite usar calculadoras.
iii) Cada pregunta vale lo mismo (1/8 cada una).
iv) Tendrás 10 minutos adicionales para preparar y enviar las respuestas a tu profesor, por lo que debes enviar las soluciones a más tardar a las 11:10.

Duración: 2 horas

1. Encuentra la ecuación del plano tangente a la superficie en el espacio xyz definida por la ecuación $x^3 + e^{x+y-z} = 3xyz - 4$, en el punto $(1, 1, 2)$.

2. Sea $f(x, y) = x^3 + y^2 - 4xy + x^2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Encuentra los puntos críticos de f y clasifícalos como máximos locales, mínimos locales, puntos silla.

3. Dada la curva en el plano xy descrita por la ecuación $x^3 - 2y^3 + x - 7 = y$, encuentra un vector normal (perpendicular) no nulo en $\mathbb{R}^2$ a dicha curva en el punto $(2, 1)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 que tiene un punto crítico en el punto $(1, 2, -1)$ y tal que su matriz hessiana en dicho punto es

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Clasifica el punto crítico de f como máximo local, mínimo local o punto silla. (Justificar)

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^4 = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^2$ para todo $\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la aproximación lineal de f en $(1, 1, ..., 1)$. Demuestra que $L(2, 2, ..., 2) = 5n^2$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Sea $w = f(x, y)$ y sean $x = u^2 - v$, $y = u + v^2$. Muestra que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4v\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 4v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que las derivadas direccionales de f en el punto $(1, 2)$ en las direcciones de los vectores $(-1, -1)$ y $(1, -1)$ valen $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ respectivamente. Encuentra la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(1, 2)$.

8. Sean f y g funciones de la forma $f(x,y,z) = 3x^2 - y^3z + axz^2$, $g(x,y,z) = -y^3 + 3x^2y - axyz$, donde a es una constante. Encuentra el valor de la constante a si se sabe que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,-1,2) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,-1,2)$.